5. 5. 421

5 S. 5 . L 21

Digitized by Google

A. XI.

Newton

A 6

Digitized by Google

ISAACI NEWTONI OPUSCULA

IN TRES TOMOS DISTRIBUTA.

Digitized by Google

Digitized by Google

ISAACI NEWTONI,

EQUITIS AURATI,

OPUSCULA

MATHEMATICA, PHILOSOPHICA

ET

PHILOLOGICA.

Collegit partimque Latinè vertit ac recenſuit

JOH. CASTILLIONEUS

JURISCONSULTUS.

TOMUS PRIMUS

Continens

MATHEMATICA.

Acceſſit Commentariolus de VITA AUCTORIS.



LAUSANNÆ & GENEVÆ,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLIV.

ILLUSTRISSIMÆ

SOCIETATI REGIÆ

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II.

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

AUGUSTISSIMI REGIS

GEORGII

FLORENTI,

Digitized by Google

OPUSCULA HÆC

A

VIRO IMMORTALI

ejuſdem

SOCIO CLARISSIMO, PRÆSIDE DIGNISSIMO,

ISAACO NEWTONO

CONSCRIPTA

DAT, DICAT, DEDICAT,

SEU POTIUS

REDDIT, RETRIBUIT, RESTITUIT

J. CASTILLIONEUS

Collector & Editor.

Digitized by Google

Digitized by Google

TU Pater & rerum Inventor; Tu patria nobis
Suppeditas præcepta, tuíſque ex, Inclute, chartis
Floriferis ut Apes in ſaltibus omnia limant,
Omnia nos itidem depaſcimur aurea dicta,
Aurea, perpetuâ ſemper digniſſima vitâ.

Lucret. De Rer. Naturâ
Lib. III. verſ. 9. & ſeq.

PRÆFATIO

Digitized by Google

JOH. CASTILLIONEUS

LECTORI S.

TOT ſummi ingenii nominiſque in re literariâ celebratiſſimi Viri doctorum Opuſculis, immò & Opuſculorum fragmentis ac reliquiis colligendis, recenſendis, & publicandis operam dedêre, eâque inſigni beneficio Scientiarum cultores affectos æqui omnes duxerunt eruditi, ut illorum exemplo, & iſtorum judicio, ſimul ac inſtituti utilitate plus ſatis profectò rationum habeat, quibus ſeſe tueatur, conſiliumque ſuum adprobet Cenſoribus, qui tempus, diligentiam & curam impenderit incœpto hujuſmodi. Quin etiam & rem ſtudioſis, ad quorum uſus monumenta ingenii doctrinæque pertinere poſſunt, gratam ſe ſuſcepiſſe eò magis jure conſtituet, quò præſtantiora, orbis eruditi ſententiâ, dudum habentur, quò inſuper minùs erant parabilia, ac denique etiam pluribus eruditionis partibus illuſtrandis ſunt aptiſſima. Inde cur ego, Matheſi Phyſicæque univerſæ deditus, Opuſcula NEWTONI, præ ceteris

Digitized by Google

id genus, elegerim colligenda, nemo earum cultor, quique quo pretio peritis Viri illius ſint ſcripta quævis, vel famâ compererit, ut & ex iis eſſe aliqua, quibus, inſuperabili pœnè difficultate, exteris pleriſque carendum in hunc uſque diem fuerit, non intelliget continuò. Videbit certè momenta hæc ſingula, conjunctaque, animum diſcendi, & in commune aliquid etiam conferendi cupidum, excitâſſe, impuliſſéve tam vehementer, ad hanc ineundam provinciam, ut nec labori parceret, neque ſumptibus abſterreri, aut difficultatibus, quas circumſpiciebat, multis magniſque oppidò, à propoſito avocari ſeſe pateretur. Sciunt utique, qui fruſtra toties NEWTONI Scripta omnia comparare ſibi laborarunt, vel fortunæ literatis minùs faventis injuriâ, vel Linguæ Britannis vernaculæ, quâ Vir illuſtris plura publicavit, inſcitiâ nimis ſanè communi eruditis aliàs hominibus peregrinis, vel commercii inter Regni illius Bibliopolas, & aliarum Regionum Librarios infrequentiâ, factum eò uſque fuiſſe, ut ne oculis quidem uſurpare potuerint longè hinc diſſiti ſtudioſi nonnulla, quorum deſiderio maximè tenerentur. Exſtare porrò alia veluti demerſa in aliorum Scriptis pretii non levis, quæ propterea paucis emere licet, itidem notum eſt. Quibus ſin & hoc addatur, nempè, omnium præcellentis illius Philoſophi commentationum plenam Gentium aliarum eruditos notitiam nec dum eſſe conſequutos, quarum idcirco nulla vel ſera certè futura fuiſſet cupido, nedum acquiſitio; haud malè me de iis mereri, cujus inveſtigatione ſollicitâ, voti, ſtatim atque conceptum erit, compotes fieri jam facilè poterunt, quantùm ſaltem optata mihi datum eſt adipiſci, prorſus confido. Reliquum igitur nihil eſt ampliùs, quod monere de his neceſſe ſit. Verùm quid præſtare conatus fuerim, quibuſque auxiliis hanc collectionem ſuſceperim, audire Lectorem intereſt, tùm quæ ad hiſtoriam cujuſcumque Opuſculi ſpectantia repererim, non ignorare. Ea tamen dumtaxat hìc ediſſeram, quantùm ad ſcopum meum facient, & ad aſſerendum Auctori ſuo NEWTONO, quæ ſunt ab eo lucubrata. Cetera Vitæ magni Viri inſerenda reſervavi.

Et

Et primò quidem, utinam omnia NEWTONI Opuſcula colligere potuiſſem, atque certò ſcire me omnia collegiſſe! Sed, cùm eum morientem (a) plures de Antiquitatibus, Hiſtoriâ, Mathematicis, Chemiâ, & Theologiâ, diſſertationes ineditas reliquiſſe conſtet; cùmque etiamnunc (proh pudor!) hoc vitio docti teneantur, ut ſoli habere malint hujuſcemodi theſauros cum ſummo publici boni detrimento, quàm eos divulgari ſine ullo privato damno, quis audeat aſſerere ſe omnia cujuſvis Scriptoris opera protuliſſe; ſeu potiùs, quis diligentiam ſuam plura fugiſſe non vereatur? Hìc ergo tibi, benigne Lector, exhibeo non *omnia*, ſed *quotquot* invenire licuit, Opuſcula NEWTONI: reliqua, ſi quæ in manum veniant, eàdem formâ, typíſque, modico pretio, tanquam Appendicem editurus. Quæret forſan aliquis, cur editionem in tempus illud non diſtulerim, quo cuncta me adeptum certò ſcirem? Sed certitudinem hanc nihil creare poteſt, niſi ſcriptum Auctoris Opera ſua dinumerantis, & ſua dumtaxat eſſe, quæ recenſuit, teſtantis; quapropter, eadem, quæ nunc dico, ſemper dicendi locus fuiſſet; cùm præcipuè nihil intentatum, nihil inhauſum reliquerim, ut omnium compos fierem. Nam, primò, quantâ potui diligentiâ, Celeberrimi hujus Viri ſcripta conquiſivi, & conquiſitorum indicem ad Clariſſimum Doctiſſimumque GABRIELEM CRAMERUM, in Genevenſi Academiâ Mathematum Profeſſorem, miſi, qui, præclarorum omnium Virorum, & idcirco NEWTONI, ſtudioſiſſimus, atque litterariæ peritiſſimus hiſtoriæ, in Angliâ prætereà diù verſatus, & ſummi nominis Anglis familiaris, ea, quæ requirebam, Opuſcula omnium optimè poterat indicare, & re ipsâ nonnulla, quæ me fugerant, pro ſummâ ſuâ humanitate indicavit: ac deinde, (ut prætercam ſcripta bis à me hoc ipſum obſecrante in publicam lucem emiſſa,) doctiſſimos Anglos aliquot, ut, quæ reperire poſſent, mihi compararent, exoravi.

Quoniam

(a) Vide ejus Vitam ſub fine.

Quoniam de Clariſſimo CRAMERO injecta mentio eſt, locum opportuniorem non expectabo agendi pro beneficiis, quibus me cumulavit, gratias, & palàm teſtandi illum mihi hæc molienti ea tribuiſſe, ut plura à parente proficiſci non potuerint. Neque hoc mirum; ſiquidem Vir ſummus utilitatem publicam unicè diligit, eique ſe totum jamdiu devovit, ut meliùs pateret, ſi Vir modeſtiſſimus orbem eruditum ſcire quot & quanta ei debeat, aut paſſus eſſet, aut pateretur. Sciant ergo omnes CRAMERI eſſe quidquid boni hìc invenient, mihi & imbecillitati meæ atque ejus abſentiæ, quidquid mali occurret, eſſe tribuendum. Nunc Opuſcula omnia ſingillatim proſequamur.

De Opuſculis TOMUM PRIMUM *conſtituentibus.*

Seriem ducit *Analyſis per Æquationes Numero Terminorum infinitas.* Hanc menſe Julio anno *1669.* BAROVIO communicavit NEWTONUS(*a*); BAROVIUS autem COLLINSIO, qui eam tranſcripſit; atque poſtea OLDEMBURGIO (*b*), qui eam dicit *univerſalem Methodum Analyticam, inſervientem menſurandis Areis omnium ejuſmodi Curvarum, & earumdem Perimetrorum, in quibus Ordinata eamdem habent communem habitudinem ad Baſim.* Hanc autem Analyſim, de quâ loquitur OLDEMBURGIUS, ipſiſſimam noſtram eſſe patet apertiſſime tum ex initio, (*Methodum generalem, quam . . . . excogitaveram,*) & fine (*nec quidquam hujuſmodi ſcio . . . perficiat,*) ibi relatis (*c*); tum ex deſcriptione, quæ illic habetur (*c*). Sed animadvertendum videtur à NEWTONO finem paulisper immutatum fuiſſe; nam, in eo exemplo, quod OLDEMBURGIUS habuit, legebatur per verbum *perficiat* (*d*).

Et hæc de Areis Curvarum inveſtigandis dicta ſufficiant. Imò, cùm Problemata de Curvarum Longitudine, de Quantitate & Superficie

(*a*) Commerc. Epiſtol. N°. I. pag. 65. 66. edit. ſecundæ.
(*b*) Ibidem N°. XIII. pag. 93.
(*c*) Ibidem pag. 94.
(*d*) Hujus Collect. Tom. I. pag. 25.

perficie Solidorum, déque Centro Gravitatis, poſſint eò tandem reduci, ut quæratur Quantitas Superficiei planæ Lineâ curvâ terminata, non opus eſt quidquam de iis adjungere (*a*).

Libellum hunc inter papyros à COLLINSIO vitâ functo relictas invenit Clariſſ. JONES deſcriptum ejuſdem COLLINSII manu; &, cùm ex BAROWII litteris tribus (*b*) ibidem repertis eam eſſe NEWTONI didiciſſet, *ab eo*, ait ille (*c*), *ſciſcitatus ſum num penes ſe adhuc eſſet autographum, quod quidem ille exquirens invenit, & mihi tradidit cum exemplari Collinſiano ad verbum uſque conveniens.* Eumdem COLLINSII manu deſcriptum habuerunt quoque Auctores *Commercii Epiſtolici* (*d*). Nos illum ab Auctore latinè ſcriptum inde fideliter tranſcripſimus.

Secundo loco eſt *Methodus Fluxionum & Serierum infinitarum.* Mens NEWTONI priùs fuerat (*e*) illam adjungendi KINCKHUYSENII introductioni ad Analyſin ſpecioſam, quam ipſe prælo paraverat. Deinde, conſilium mutans, eam edere conſtituerat (*f*) cum *Tractatu de Refractione Lucis & Coloribus, quem tum * in promptu* habebat, ut ipſius verbis utar, (nam Editores Commercii Epiſtolici aſſerunt hunc Tractatum illum ipſum eſſe, de quo mentio facta jam fuerat (*e*), quod liquet etiam ex Auctoris deſcriptione (*g*); ſed objectiones à NEWTONI de Luce ſententiâ natæ eum deterruerunt. Hanc KINCKHUYSENII introductionem à NEWTONO auctiorem redditam, cum hujus Methodi additamento, edendam ſibi curæ fore pollicitus eſt COLLINSIUS (*h*); videtur autem obſti-

† 3 natum

(*a*) Comm. Epiſtol. N°. XIII. pag. 94. 95. edit. ſecund.
(*b*) Hæ Litteræ fuerunt editæ in Comm. Epiſtol. N°. I. pag. 65. 66. edit. ſecund.
(*c*) Præfat. in Analyſ. per Quantitatum Series, Fluxiones, & Differentias, &c.
(*d*) Comm. Epiſtol. N°. II. pag. 67. edit. ſec.
(*e*) Ibidem N^{ris}. XXII. XXIII. pag. 101. 102.
(*f*) Ibidem N°. LVII. pag. 149. & hujus pag. 334. Tom. I.
* Anno 1671.
(*g*) Ibidem.
(*h*) Ibidem N°. XXIII. pag. 102.

Puncta; *de quo Clariſſimus Auctor olim mentionem fecerat* (*a*) *in Epiſtolâ ſuâ ad* OLDEMBURGIUM 24. *Octob.* 1676, *& cujus ſolutionem dedit in Lemm. V. lib. III.* Princip. Philoſ.; *non tamen prorſus eamdem, quoad conſtructionem, cum eâ, quam in præſentiarum tradimus.* Hæc habet JONES loco citato, è quâ Collectione noſtræ *Methodi Differentialis* exemplum deſumpſimus.

Opuſculi ſexti Articulus primus proculdubio NEWTONI eſt, de ſecundo autem dubitatur; ſed quoniam breve eſt, ad rem facit, & Auctoris ingenium ſapere videtur, afferendum cenſui, melius me facturum arbitratus, ſiquid alienum ponerem, quàm ſi quid NEWTONI prætermitterem. Indubia ſunt Opuſcula reliqua.

Opuſculum ſeptimum *Newtonianum* eſſe teſtatur FONTENELLIUS (*b*).

Opuſculum decimum & undecimum habentur etiam in Collectione JONES (*c*), & in Operibus WALLISII (*d*). Has editiones inter ſe diligenter contuli, & uno in loco, ubi varia lectio erat alicujus momenti, eam attuli.

Opuſculum decimum tertium legitur in WALLISII Operibus (*e*), eſt etiam in JONES Collectione, ſed minùs perfectum quàm in WALLISII Operibus. Eſt excerptum Epiſtolarum, *Newtonianarum*. Epiſtolas ipſas habere non potui. Neque id mirum, cùm JONES ipſe Anglus, NEWTONO amicus eas habere nequiverit; ſiquidem excerptum dedit. Hæc Opuſcula latinè ab Auctore ſcripta ſunt. Reliqua gallicè edita ſunt in libro, cui titulus, *Recueil de diverſes pieces ſur la Philoſophie, la Religion naturelle, l'Hiſtoire, les Mathematiques &c. Par Mrs. Leibnitz, Clarke, Newton & autres Auteurs célèbres.* Iterum edito *Amſtelodami* apud *Franciſcum Changuion* an. 1741.

Tom.

(*a*) Pag. 340. hujus.

(*b*) Vide *Newtoni* Elogium in Hiſt. de l'Acad. Royale des Sciences An. 1727.

(*c*) Anal. per Quantit. Serier. Flux. & Diff. pag. 23. 31.

(*d*) Tom. III. pag. 622. & 634.

(*e*) Tom. II. pag. 391.

Tom. ſecund. initio & gallicè litteræ LEIBNITII, anglicè NEWTONI in libro inſcripto Hiſtoria Fluxionum ſive Tractatus originem & progreſſum peregregiæ iſtius Methodi breviſſimo compendio, (& quaſi ſynopticè) exhibens. Per Joſephum Raphſonum A. M. & R. S. S. *Londini, typis Pearſonianis* an. 1715. à pag. 97. ad finem, unde verſas eas hìc exhibui. Et hæc quidem de Tomo Primo.

De Opuſculis TOMUM SECUNDUM *componentibus.*

Secundus initium ducit à Mundi ſyſtemate, quod Angli omnes NEWTONO tribuunt. Priùs editum fuit verſum in Anglum ſermonem, deinde verò latinè, ut ab Auctore conſcriptum fuerat, & nos eum ſiſtimus fideliter à latinâ editione tranſcriptum.

De Lectionibus Opticis quæ ſequuntur, optimè, cenſeo referam partem præfationis editioni Londinenſi præfixæ. Ibi diſcimus eſſe has Prælectiones publicas primas, quas NEWTONUS Cantabrigiæ habuit, quando BARROVIUS anno *1669* ei conceſſit munus profeſſorium in Cathedrâ Lucaſianâ. Hunc librum edidiſſet ipſe Auctor, niſi ineptæ quorumdam imperitorum cavillationes eum deterruiſſent. (Hic fortè eſt Tractatus ille de Refractione Lucis & Coloribus, quem, edendi cum Serierum infinitarum & Fluxionum Methodo conſilium cœpe at NEWTONUS.)

Liber de Opticis anno 1704 editus ab hoc tractatu haud parum differt. Multa quidem in utroque inveniuntur eodem ſenſu, ſed ratione diverſâ tradita; multa tamen præclara hìc occurrunt, quæ in altero non habentur. Ibi enim Auctor caviſſe, quantùm potuit, videtur, ne demonſtrationes geometricas cum argumentis philoſophicis immiſceret; & ubi neceſſe fuit Propoſitionem mathematicam proponere, ejus demonſtratio vix unquam occurrit. Contrà autem, hìc omnia geometrica in hoc argumento neceſſaria fusè demonſtrat; quæ forſitan in altero libro ideo omiſerit, quoniam haud dubitavit, quin hæ prælectiones aliquando lucem eſſent

viſuræ; cùm non modò publicè Cantabrigiæ lectæ in Archivis fuerant repoſitæ, ſed etiam alia exemplaria in amicorum manibus adſervabantur. Quod ſpectat ad prima optices elementa, auctor noſter hìc ubique BARROVII prælectiones opticas ſequitur; & quæ, ille de omni luce ſcripſerat, NEWTONUS perſequitur ulteriùs, & applicat ad diverſam Radiorum Refrangibilitatem; rem BARROVIO ignotam, ſed ab eo omnino probatam quando ei ab auctore noſtro explicata fuit; quod una ex epiſtolis D. COLLINSII in Commercio epiſtolico edita teſtatur, ubi BARROVIUS de his prælectionibus loquens, opus vocat, quo majus præſens ætas vix protulit. Hic etiam multæ propoſitiones demonſtrantur, quas auctor cum BARROVIO communicavit, & in prælectionibus ejus, demonſtrationibus prætermiſſis, editæ fuêre. Hic nimirum demonſtratur modus illius focum ſuperficierum ſphæricarum inveniendi, & in omnibus aliis curvis locum habere oſtenditur ope Radii, qui dicitur, curvaturæ; item cauſticæ, (quas vocant) à refractione ortæ hìc determinantur. Has utique cauſticas in ſuperficiebus ſphæricis, & ipſe BARROVIUS determinavit. Hiſce verò prælectionibus NEWTONUS in curvis omnibus Radii curvaturæ earum ope has cauſticas exhibet.

Harum prælectionum exemplum NEWTONUS olim GREGORIO aſtronomiæ Profeſſori Saviliano dedit, à quo deſumtum eſt illud unde hæc editio deſcripta eſt, quod ſummâ fide & curâ deſcriptum fuiſſe cum eo GREGORII conferentes invenimus. Exemplum autem Gregorii, cùm ab ipſo NEWTONO fuiſſet acceptum, non dubitavimus, quin perfectum eſſet; ſed poſtquam editio noſtra typis fuerat impreſſa, audivimus exemplum illud Cantabrigiæ, in Academiæ archivis aſſervatum, magis eſſe abſolutum; cujus exemplum nacti, ex collatione rem ita eſſe invenimus. Differentias igitur unà cum erratis typographicis ad libri calcem adnotavimus. (Nos autem eas locis ſuis oppoſuimus.) Notularum, quas Editor addiderat, eas reliquimus, quibus loca indicantur ad quæ Newtonus reſpicit,

vel

vel idem corrigitur. Unam aut alteram, quibus explicabatur, omiſimus, quia ejus explicandi locus hìc non eſt.

Ceterum cùm hujus opuſculi editio ſatìs mendoſa ſit, & cùm veroſimillimum ſit, non omnes Typographicos errores, in erratorum Indice, comprehenſos fuiſſe; non pauca & conjecturâ correxi; ſed quæ ſolùm ad ſtylum ſpectarent; & id quidem maximâ ſobrietate, ita ut potiùs verear, ne reprehendar, quòd non ſatìs NEWTONI latinum ſermonem ad nativum nidorem reſtituerim, quàm quòd nimis audacter id fecerim.

Opuſculum XIX. è Tranſactionibus totum deſumptum eſt. Latinè ab Auctoribus ſcripti fuerunt Articuli XII. XIII. XIV. XV. & XVI. cetera ex Anglo ſermone verti. Ante Articulum XXXI. legitur in Tranſactionibus brevis diſſertatio continens Refractionum hiſtoriam, & alia ad rem facientia, quam, quia NEWTONI non erat prætermiſi.

Opuſculum XX deſumpſi ex HARRIS *Lexico Technico*, qui, illud à NEWTONO ſcriptum fuiſſe teſtatus, duo cum Auctoris veniâ affert exempla, latinum alterum autographum, alterum Anglicum à ſe concinnatum. Duo hæc exempla non paucis diſcriminibus inter ſe diſſentiunt, quæ, licèt Auctori fuerint approbata, prætereunda cenſui, quia leviſſima ſunt. Sed hoc adeſt notatu dignum. Pag. 414. lin. 11, & 12. Tomi noſtri ſecundi habetur. *Si Particulæ acidæ minori proportione cum terreſtribus jungantur, ut ab iis ſupprimi & occultari videantur.* Anglicum verò ſonat. *Si hæ acidæ Particulæ jungantur terreis dumtaxat in parvâ Quantitate, adeò firmiter ab illis retinentur, ut omninò ab iis ſupprimi, & occultari videantur.* Et mihi quidem hæc ſecunda lectio ita primæ anteſtare videtur, ut diu dubitaverim an hanc afferrem, primàmque ſupprimerem, ſed Editoris fidei magis conſonum judicavi Textum fideliter exhibere, & de hoc diſcrimine hoc loco monere.

Ultimum locum occupat *Scala Graduum Caloris & Frigoris.* Edita hæc fuit in Tranſactionibus Philoſophicis ſine Auctoris nomine; ſed eam apertè NEWTONO tribuit COTTESIUS

aut ejus Interpres. (*a*) Ad eam quoque reſpicere videtur NEWTONUS (*b*) ipſe, dum ait, *Thermometro expertus ſum*, *quòd ſeptuplo ſolis æſtivi calore aqua ebullit*, ut optimè notat Doctiſſimus Interpres. (*b*)

Sic igitur perluſtrato Tomo ſecundo ad tertium veniamus.

De Opuſculis TOMUM TERTIUM *conficientibus.*

De *Brevibus Chronicis* hæc habeo. (*c*) Digniſſima *Walliæ* Princeps, & deinde Britanniæ Regina, quæ ab ipſo NEWTONO nonnulla de Chronologiâ ſuâ didicerat, eum per virum doctrinâ & ſanguine nobiliſſimum, *Abbatem* CONTI, Patricium Venetum tunc in Britanniâ degentem, accivit petitura ea, quæ de Chronologiâ ſcripſerat. Ille, ſcripta hæc imperfecta eſſe cauſatus, eorumdem ſummarium ſe confecturum recipit. Brevì conficit, affert, eò adigitur, ut ejus exemplum cum nullo communicandum *Abbati* CONTI impertiret. Hic poſtea, *Lutetiam Pariſiorum* delatus, tantum theſaurum omnino celandum non putavit; quo factum eſt ut *Brevia Chronica*, in Gallicam Linguam à Clariſſimo FRERETO verſa cum quibuſdam ejuſdem obſervationibus, Auctore fruſtra renuente, ederentur *Lutetiæ Pariſiorum* anno 1725. Deinde, poſt NEWTONI mortem, anglicè typis excuſa fuerunt cum Chronologiâ, unde ego ea in Latinum ſermonem verti. Ceterùm, de ipsâ *Walliæ* Principe, reor, verba facit (*d*) noſter in Apologiâ ſuâ pro Brevibus Chronicis.

Aſſerit NEWTONUS ipſe (*e*) ſe *Cantabrigiæ* degentem Hiſtoriâ & *Chronologiâ* reficere ſolitum, dum alia ſtudia fatigatus

(*a*) Leçons de Phiſique expérimentale &c. traduites de l'Anglois de Mr. *Cottes* &c. à Paris 1742. pag. 384.

(*b*) Princip. Mathemat. cum Comment. PP. *Thomæ le Sueur* & *Franciſci Jacquier* Tom. III. Par. Prim. pag. 51. 52.

(*c*) Ex Elogio *Newtoni* ſupra cit. collato cum Opuſc. XXIV. Hujus collec. T. III. pag. 275.

(*d*) Tom. III. hujus Collect. pag. 276. 277.

(*e*) Ibid. pag. 280.

Digitized by Google

tus intermittere cogebatur. Hinc orta eſt ejus *Chronologia*, quam ut publicæ luci deſtinaret, nondum animum inducere poterat anno 1725. Tamen, paulò ante quàm mortuus eſt, eam emendavit & edere conſtituerat (*a*), quod effectum fuit à CONDUITTO, ejus affine, anno 1728, qui monet (*b*), quòd, cùm Caput quintum cum aliis tranſcriptum non eſſet, dubitandum videbatur, an Auctor illud vulgare decreviſſet. Quia tamen erat inter ejus ſcripta, &, (ut patet,) ad hujus operis proſecutionem pertinet, non omittendum cenſuit. Poſtea, eodem anno ab Anonymo, cui multum me debere fateor, in gallicam linguam verſa typis vulgata fuit *Lutetiæ Pariſiorum.*

Obſervationes ad DANIELIS *vaticinia, nec non ad Sancti* JOANNIS *Apocalypſim*, pariter poſt ſcriptoris interitum anno 1733 editæ fuerunt anglicè. Eaſdem latinitate donavit egregius verbi divini miniſter *Guilielmus* SUDERMANNUS qui eas edidit Amſtelodami anno 1738. Cùm Doctiſſimus Interpres multum operæ in hac verſione impenderit, & cùm illam optimè exceperint Docti, meliùs me facturum putavi, ſi eam afferrem, quàm ſi novam, multo minoris pretii certè futuram, concinnarem. Jam Interpretem ipſum de hoc NEWTONI libello, & de verſione ſuâ loquentem audiamus.

Quas tibi offerimus, Lector, Illuſtriſſimi NEWTONI lucubrationes, non commentarium, (quem vocant,) ad DANIELEM & *Apocalypſin*, continent. *Obſervationum* illis, quod attendas, nomen eſt. Non ſingula hìc explicantur verba; minùs, etiam, minutias ſectatur Noſter: nec ulla, tamen, in his vaticiniis extat res memorabilior, quæ, quò referenda ſit, ipſius judicio, non, in genere, ſaltem, innuat. Ex ipſis rerum eventibus vaticinia interpretatur, & hos, quidem, limites prætergredi, ſummo jure, ipſi ſtultum ac ridiculum videtur. Ceterùm, abſque ambagibus ſuam ſententiam exponit, rerúmque geſtarum hiſtoriâ illuſtrat.

†† 3 Supereſt,

(*a*) Monit. in Chronol. edit. Londinen.
(*b*) Ibidem.

Supereſt, ut quid, hàc in verſione & editione, ego præſtiterim, paucis exponam. Quantùm potui Latinè locutus ſum; nec tamen, in rebus plerumque Eccleſiaſticis, omninò vocibus Barbaris abſtinere licuit; quibus ipſis, tamen, vix, niſi cùm vel prorſus, vel eâdem notione, Latinæ deërant, uſus ſum. Ceterùm multùm abeſt, ut ſtylus ſit, qualem vel ipſe cupiebam, vel reddere eum potuiſſe mihi videor. In alienis vertendis, ipſius Auctoris ſtylo, quantùm poſſit, inhærendum eſſe Interpreti cenſeo. Simpliciſſimus, verò, eſt ſtilus NEWTONI. Aliis nihilominus, phraſibus & vocibus hìc illic uti licuiſſet. Scias, autem, Lector, me, poſtquàm integram hanc verſionem adornâſſem adeò majorum negotiorum majori copiâ fuiſſe prohibitum quantùm decreveram temporis illi limandæ impendere, ut vel ipſa ejuſdem editio hac de causâ nunquam fortaſſe fuiſſet proditura, niſi illam fermè qualis eſſet emittere, in eorum gratiam qui Anglica non intelligunt, quàm premere, melius duxiſſem. Porrò, Sacræ Scripturæ loca, Noſtro citata, ſimpliciter, prout hìc ea vel ipſe vertit, vel ex Anglicâ verſione deſumſit, Latinè reddidi, nullam ex Latinis quæ exſtant verſionibus ſequutus, eò quòd ſæpiùs ipſa Anglicana verſio ab aliis, ſæpiùs etiam NEWTONUS ab illâ differt. Eodem modo egi in locis, Noſtro ex veteribus & Eccleſiæ Patribus citatis. Ubicumque Anglicè ea promebat, Latinè ea verti; ubicumque ipſe Latinè, ſive ex ſuâ, ſive ex aliorum interpretatione, ea dabat, verbotenus deſcripſi. Sæpiſſimè aliter facere omninò non licuit, multis eorum, quos citat NEWTONUS, Auctorum, non inſtructo; atque hoc ipſum in causâ fuit, quòd non ſemper, ubi ſuos ille Auctores adſcribit, & loca diſtinctè adnotat, num id rectè fecerit, conſulere potuerim. Sæpiùs, itaque, hoc factum, ſæpiùs etiam citationes indè emendatæ: ſæpiùs notata Auctorum, quos nomine tenus dumtaxat Noſter appellabat, loca. Sæpiùs, autem, fieri non potuit, cùm nec ipſos Auctores aliquando noſter innueret. Vitia, inſuper, Typographica ſuſtuli; ex. gr. p. 400. bis legebatur *Philometor*, tùm pro *Epiphane*, tùm pro *Seleuco Philopatore.* Aliquando tamen Lectores vitii monendos eſſe, cenſui,

cenſui, ut p. 326 &c. Aliquando, etiam, bis eadem occurrebant, ubi ſemel omittenda duxi; ſcilicet, non tantùm pag. 362 & 406, ubi illud monui, verùm etiam pag. 355 & 356. Præter animadverſiones quaſdam, & ſummaria rerum in margine, tres indices ad calcem adjeci. (Quorum duos rejeci, ne liber nimiùm excreſceret, alterum inter meum invenies.)

De Notis, autem, pauca monenda ſunt. Meas, ab illis quæ Auctori debentur, unciculis, quibus illæ includuntur, diſtinctas videbis. Longè autem plura adnotare erat animus, ſed eadem, cujus mentionem feci, negotiorum majorum, & quæ minimè negligi fas eſt, copia, obſtitit quò minùs variis rebus penitiùs inveſtigandis otium ſuppeteret: quo ſi majori gaviſus fuiſſem, de fundamentis expoſitionum NEWTONI & aliorum, præſertim quod ad vaticinium *de ſeptuaginta hebdomadibus*, egiſſem diſtinctiùs. Eadem mihi otii penuria in causâ fuit, quare non examinaverim, num rectè, númve perperam Noſter hiſtorias, (ſi qua de iis ſit inter Viros Doctos controverſia) referat; quod tamen aliquatenus feci ad initium Cap. IX. Et ad illud quidem caput, quid ad ſingula præſtare intenderam, ſpecimen exhibui. Non, itaque, credendum, me, ubicumque nihil notavi, vel ejuſdem cum noſtro eſſe ſententiæ, vel nihil notandum duxiſſe. Multa erant præ manibus, verùm ulteriùs expendenda, aliique ad illa conſulendi ſcriptores, priùs quàm par eſſet ea emittere: atque hæc omittenda potiùs, quàm non cocta ſatis tibi offerenda, videbantur. Uno loco, paginâ, ſcilicet, 422, ad hanc meam Præfationem te remitto, quòd, variis de cauſis, meliùs videbatur, hic, quàm illic, quæ neceſſe erat, monere. Docet ibi Noſter, in variarum quæ memoraverat, ſuperſtitionum propagatione anteſignanos fuiſſe Monachos, atque hiſce ducem ANTONIUM. Egerat, autem, præcipuè de invocatione Sanctorum, atque hanc in Eccleſiam introductam dixerat honoribus, Sanctorum reliquiis exhibitis, eò maximè, quòd Ægyptii Martyrum cadavera inhumata, in lectulis, privatim in ædibus ſuis, ſervabant. Fuit, autem, in Angliâ, qui NEWTONUM poſtremæ oſcitantiæ accuſavit, eò quòd harum ſuperſtitionum

ſtitionum non tantùm eximium promotorem faciat ANTONIUM, verùm etiam, & hoc præſertim ex ATHANASII loco citato id probaretur: integer, enim ATHANASII locus, cujus partem Noſter citat, alieniſſimum ab iis ſuperſtitionibus fuiſſe ANTONIUM, judice hoc Anonymo, teſtatur. Hæc cùm accuſatio, fortè fortunâ, mihi innotuiſſet, ATHANASIUM conſulendum, atque omnia quò reſpicit, hìc deſcribenda cenſui. Ita, ergo, Epiſcopus Alexandrinus, *in Vitâ* ANTONII, versùs finem, *Operum Vol. II. pagg.* 501. *&c. Editionis Pariſienſis, anni* 1627. *Quis, verò, vitæ finis ipſi fuerit, æquum eſt & me commemorare, & vos cupidè audire, cùm & hoc æmulationem mereatur. Monachos, more ſuo, in monte exteriore viſebat: divinâque providentiâ de vita ſua exitu certior factus; poſtremùm vos jam viſo, inquit fratribus, &c. —— Ad hæc cùm fratres ipſum, ut maneret ſecum, vel invitum, adigere conarentur, ibidémque vitâ fungi, refragatus eſt, cùm alias ob multas cauſas, quòd ipſe ſilentio oſtendit, tùm ob hanc potiſſimùm: Amant Ægyptii piè defunctorum, atque in primis ſanctorum Martyrum corpora funerare quidem & linteis involvere; non autem mandare terræ, ſed, lectulo impoſita, intra privatos parietes retinere; mortuos eâ ratione honore ſe afficere exiſtimantes.* ANTONIUS *idcirco ſæpiùs Epiſcopos rogavit ut populum erudirent; ſimiliter etiam laicis pudorem injecit, & mulieres objurgavit; hoc neque legitimum, neque omnino ſanctum eſſe adſerens. Nam & Patriarcharum & Profetarum corpora, ad hunc uſque diem ſepulchris ſervari, ipſum etiam Domini corpus in monumentum poſitum fuiſſe, ſaxum quoque obvolutum, quo tegeretur, donec die tertio reſurgeret. Quibus verbis peccare demonſtravit eum, qui poſt mortem, defunctorum corpora non humaret, quamvis ſancta eſſent: quid, enim, majus ſanctiúſve corpore Domini. Multi, ergo, hoc audito, poſtea ſub terram condiderunt cadavera, gratiáſque Deo egerunt, quòd tam probè inſtituti eſſent.* ANTONIUS, *autem, hujus moris gnarus, metuénſque ne & ſuo ita cadaveri facerent, poſt quàm Monachis, qui in exteriore erant monte, mandata dediſſet, ſeſe inde abſtulit, montémque interiorem ingreſſus, ubi commorari ſolebat, poſt menſes paucos in morbum incidit. Tum vocatis iis,*

qui

qui cum ipſo erant (duo erant hi, qui & intus manebant, quindecim annos ἀσκούμενοι, *eique, propter ſenectutem, miniſtrantes) ipſis dixit : Equidem, ut ſcriptum eſt, viam patrum proficiſcor ; me, quippe, à Domino vocari video : vos, autem, ſobrii eſtote, nec diuturnam veſtram* ἄσκησιν *perdite, ſed, tanquam primordio jam capto, alacritatem animi veſtri ut retineatis incumbite. Noſtis inſidiatores Dæmones, noſtis quàm ſint immanes quidem, at viribus imbecilles. Ne, igitur, iſtos timeatis, verùm potiùs ſemper Chriſtum ſpirate, eique credite, ac vivite tamquam in dies morientes, ipſi vobis caventes, earúmque memores admonitionum, quas ex me audiiſtis. Nulla, porro, vobis ſit cum ſchiſmaticis conſuetudo, neque omnino cum hæreticis Arianis : ſcitis enim qui & ego illos ſim averſatus, propter perverſam ipſorum Chriſtóque adverſam ſectam.* Σπουδάζετε δὲ μᾶλλον καὶ ὑμεῖς, ἀεὶ συνάπτειν ἑαυτοὺς, προηγουμένως μὲν τῷ Κυρίῳ, ἔπειτα δὲ τοῖς ἁγίοις· ἵνα μετὰ θάνατον ὑμᾶς εἰς τὰς αἰωνίους σκηνὰς, ὡς φίλους καὶ γνωρίμους, δέξωνται καὶ αὐτοί. Ταῦτα λογίζεσθε, ταῦτα φρονεῖτε. καὶ εἰ μέλει ὑμῖν περὶ ἐμοῦ, καὶ μνημονεύετε ὡς περὶ πατρὸς· μὴ ἀφῆτέ τινας τὸ σῶμά μου λαβεῖν εἰς Αἴγυπτον, μή πως ἐν τοῖς οἴκοις ἀπόθωνται. Τούτου γὰρ χάριν εἰς ἦλθον εἰς τὸ ὄρος, καὶ ἦλθεν ὧδε. οἴδατε δὲ καὶ πῶς ἀεὶ ἐνέτρεπον τοὺς τοῦτο ποιοῦντας, καὶ παρήγγελλον παύσασθαι τῆς τοιαύτης συνηθείας. θάψατε οὖν τὸ ὑμέτερον ὑμεῖς, καὶ ὑπὸ γῆν κρύψατε. καὶ ἔσω τὸ παρ' ἐμοῦ ῥῆμα φυλαττόμενον παρ' ὑμῖν, ὥστε μηδένα γινώσκειν τὸν τόπον, πλὴν ὑμῶν μόνων. ἐγὼ γὰρ, ἐν τῇ ἀναστάσει τῶν νεκρῶν, ἀπολήψομαι παρὰ τοῦ Σωτῆρος ἄφθαρτον αὐτό. [*Vos, autem, & ipſi potiùs operam navate ut adhæreatis, primò, quidem, Domino, deinde Sanctis ; ut poſt mortem vos, in æterna tabernacula, tamquam amicos & notos, & ipſi recipiant. Hæc obſervate, hæc animadvertite, ac ſi qua vobis mei cura, & inſtar patris mei mementote. Ne ſinatis ullos meum cadaver in Ægyptum ferre, ne quando in ſuis domibus id deponant. Propterea, enim, in montem abii, & huc veni. Scitis, autem, & quomodo ſemper objurgaverim illud facientes, & adhortatus ſim ut mitterent illum morem. Vos, itaque, meum cadaver ſepelite, & ſub terrâ condite : ac obſervetur à vobis id quod dixi, adeò ut nemo, præter vos ſolos, locum ſciat. Ego, enim, in reſurrectione*

mortuorum, illud incorruptum à Servatore recipiam.] Cenſet Anonymus nullam eſſe, quâ ingentis criminis abſolvatur NEWTONUS, rationem, niſi vel ipſum ATHANASIUM non legiſſe, ſed tantùm, hæc, alii citata, memoriæ causâ notâſſe, poſtea exactiùs expendenda; vel has poſthumas Obſervationes, ut alias aliorum magnorum virorum, nihil eſſe, præter adverſaria, è quibus opus ejuſmodi componere mors Auctorem prohibuit. Poſtrema conjectura non omnino præter rationem videtur. Attamen & aliâ ratione, criminis certè magni, abſolvi NEWTONUS poſſit, etiam ſi ipſe, quo modo eæ ſunt editæ, has Obſervationes perſcripſerit. Scilicet, nihil aliud culpat ANTONIUS, niſi corpora inhumata ſervari; nihil aliud vetat, nulli alii rei moribundus proſpicit, niſi ne ſuum inhumatum ſervetur. Miraculorum edendorum virtutem oſſibus Sanctorum adſcribere non vetat; nec magis animarum eorum invocationem. Quin hanc potiùs, quæ ſuperſtitionum NEWTONO eſt cumulus, tacitè probat, jubendo ut Diſcipuli ſui *Sanctis adhæreant, ut & hi ipſos, poſt mortem, quaſi amicos & notos, recipiant in æterna tabernacula.* Minimùm Sanctorum animabus, rerum, quæ in terris aguntur, conſcientiam, tacitè adſcribit: quod ſatis profectò eſſe queat, nec multùm ſuperſtitioni deditis hominibus, ut haud fruſtra ſeſe illas invocaturos credant.

Hæc etiam adnotanda proponit vir omni laude dignus.

Ad ea, quæ leguntur pag. 336. 337. (Cùm Noſter Senatum populúmque & Principatum Romanum inter decem cornua, Cap. VI. non memoraverit, Imperiique veteris Romani reliquias jam in regno Ravennæ ſtatuerit, manifeſtum eſt, humani aliquid paſſum fuiſſe Virum Summum cùm hæc ſcriberet.)

Ad pag. 410. lin. 2. à fine [Errat NEVVTONUS, cujus memoriæ non rectè obverſatus eſſe ſequens locus ATHANASII (in fine Præfationis ad Vitam ANTONII) videtur. Διὰ τοῦτο ἅπερ αὐτός τε γινώσκω, πολλάκις γὰρ αὐτὸν ἑώρακα, καὶ ἃ μαθεῖν ἠδυνήθην παρὰ τοῦ ἀκολουθήσαντος αὐτῷ χρόνον οὐκ ὀλίγον, καὶ ἐπιχέαντος ὕδωρ κατὰ χειρὸς αὐτοῦ, γράψαι τῇ εὐλαβείᾳ ὑμῶν ἐσπούδασα. *Propterea & quæ ipſe novi, (ſæpe, enim, illum vidi,) & quæ diſcere ab eo potui*

potui, qui non parum temporis ipſum ſequutus eſt, & aquam manibus adfudit, veſtræ benevolentiæ ſcribere diligenter ſtudui.]

Totam Præfationem, utpote longiuſculam, non deſcripſi, hæc afferre contentus, quæ præcipua viſa ſunt.

Ultimum Opuſculum de *Sacro Judæorum Cubito &c.* Latinè ab Auctore ſcriptum, Anglicè editum fuit inter Opera miſcellanea Celeberrimi *Johannis* GRAVII, Tom. II. pag. 405. ann. 1737. *Londini*, unde nos illud deſumpſimus.

En, Lector optime, quæ tibi in præſentia poſſum offerre. Si meum rem tibi gratam & utilem faciendi ſtudium non diſpliceat, voti reus factus ſum. Ceterùm, in verſionibus meis perſpicuitatem ſum potiùs quàm elegantiam ſecutus. Res ipſa id petere videbatur, tum, quia Mathematica, Phyſica, & hujuſcemodi ſunt dilucide tradenda, tum, quia NEWTONI ſtylus (cui meum accommodandum cenſui,) omnino ſimplex eſt & omni ornamento deſtitutus præter illud, quod ſponte gignunt verba, cùm

— — proviſam rem non invita ſequuntur (*a*).

Præterea, fruſtra, fateor, elegantiam eſſem venatus. Nam; & profectò patet

— — — *Anglorum* obſcura reperta
Difficile inluſtrare Latinis verſibus eſſe,
(Multa novis verbis præſertim cúm ſit agendum,)
Propter egeſtatem linguæ, & rerum novitatem (*b*);

& Romanè

Judice, quem noſti, CLERICO (*c*)

ſcribere ſolùm datur illi, qui per aliquot annos, ceteris omnibus neglectis, optimos illius linguæ Auctores diurnâ nocturnâ-

(*a*) Horat. Art. Poet. verſ. 311.
(*b*) Lucret. de rerum nat. Lib. I. verſ. 137. 138. 139. 140.
(*c*) Cler. Biblioth. Ant. & Nov. Tom. 25. pag. 381.

Digitized by Google

que manu verſavit. Mihi verò, ab ineunte ætate, rebus potiùs quàm verbis addiſcendis deſtinato, quantùm voluiſſem operæ Latinis Litteris navare non licuit. Sed, peropportunè accidit, ut hìc ornamenta non requirantur, perſpicuitas & fidelitas ſufficiant. Quæ duo utrùm præſtiterim, penes Doctos judicium eſto. Nihil certè, quod ad utrumqne, & præcipuè ad fidelitatem verſionis, conduceret, prætermiſi. Quandoquidem, poſtquàm, quantâ potui diligentiâ opuſculum aliquod ſum interpretatus, illud cum Gallicâ, ſiqua aderat, verſione accuratè contuli, aut, quantùm licuit, cum Viris rerum ipſarum, & Anglicæ ac Latinæ Linguæ peritiſſimis emendavi. Quamobrem illis à me debetur gratia maxima, eóſque obſecro, ut publicum hoc grati animi teſtimonium non reſpuant. Quamquam autem totis viribus errores vitaverim, eos non evitavi, ſatis ſcio. Tuam, igitur, cùm pro meis, tum pro Typographorum mendis clementiam imploro, Lector benigne. Vale, & memento quòd, humanæ naturæ vitio,

—— Opere in longo fas eſt obrepere ſomnum (*a*).

(*a*) Horat. Art. Poetic. verſ. 360.

Digitized by Google

DE VITA

ISAACI NEWTONI

COMMENTARIOLUS.

ISAACUS NEWTONUS, natus eſt *Woolſtropiæ* in *Lincolni* Regione ipſo *Nativitatis Dominicæ* die (Veteri Stilo) anno 1642; originem ſuam referebat ejus familia ad natu maximum *Johannis* NEWTONI Equitis aurati, & *Woolſtropiæ* Domini, filium. Hujus Gens per totos ducentos annos in *Woolſtropiam* dominata fuerat, ubi ſe tranſtulerat ex *Weſtby* in eâdem Regione; orta autem erat *Newtoni*, quæ *Lancaſtri* Urbs eſt. Matrem habuit ISAACUS noſter *Annam* ASCOUGH, antiquo genere prognatam, quæ, cùm Virum, Auctoris noſtri patrem, amiſiſſet, iterum nupſit. Hæc filium ſuum, duodecim annos natum, miſit in publicum *Granthami* Ludum litterarium, unde illum aliquot pòſt annis removit, ut res ſuas ipſe curare conſueſceret. A quo negotio tam alienum, & tam libris ſuis deditum experta eſt, ut eum *Granthamum* remitteret, quò ſibi poſſet indulgere. Hinc tranſiit ad Collegium *Trinitatis* in Univerſitate *Cantabrigienſi*, anno 1660, ætatis annum agens duodeviceſimum. Auctor eſt FONTENELLIUS (*a*) eum, Mathemata diſcere cupientem,

(*a*) *Hiſtoire de l'Acad. Royale des Sciences.* An. 1727. *Elog. Newt.*

Digitized by Google

operam *Euclidi* non dediſſe, utpote qui nimis perſpicuus, nimis ſimplex, & indignus, in quo pervolvendo tempus tereretur, illi videbatur. PEMBERTONUS ferè eadem narrat; affirmat (*a*) enim ſe NEWTONUM ſæpiùs querentem audiiſſe, quòd Mathematum curriculum aggrediens totum ſe tradidiſſet libris CARTESII & aliorum *Algebriſtarum*, minus attentè perlectis EUCLIDIS elementis, quam tantus Auctor merebatur. Perfunctoriè igitur evolutis elementis ſedulam operam dedit CARTESII *Geometriæ*, & KEPLERI Opticis. Patet ex ejus expenſi rationibus illum SCHOOTENII *Miſcellanea*, & CARTESII *Geometriam*, atque WALLISII opera emiſſe anno 1663 paulò ante diem quo *Domini* nativitas celebratur. Hos libros, dum legebat, notis & obſervationibus augebat, ac ſcientias, de quibus agebant, multùm promovebat. Sic (*b*) annis 1664, 1665, dum proferre conabatur *Wallisianam* interpolationem, excogitavit rationem Serierum obtinendarum per Radicum Extractionem & per Diviſionem. Anno 1664 artium Baccalaureus factus eſt. Anno (*c*) 1666 admirandæ ſuæ Opticæ fundamenta jecit; & anno 1668 artium Magiſter creatus fuit, cùm jam Collegii ſocius fuiſſet electus. Hoc eodem anno, menſe *Septembri* (ſunt verba (*d*) Clariſſimi COLLINSII) MERCATOR *Logarithmotechniam* edidit ſuam, quæ ſpecimen hujus Methodi, (videlicet *Serierum infinitarum*) in unicâ tantùm Figurâ, nempe Quadraturam *Hyperbolæ* continet. Haud multo poſtquam in publicum prodierat liber, exemplar ejus Clariſſimo WALLISIO *Oxoniam* miſi...., aliúmque BARROVIO *Cantabrigiam*, qui quaſdam NEWTONI chartas (*e*).... extemplo remiſit. E quibus, & ex aliis, quæ olim ab Auctore cum BARROVIO communicata fuerant, patet illam Methodum à dicto NEWTONO aliquot annis antea excogitatam, & modo univerſali applicatam fuiſſe; ita ut ejus ope in quavis Figurâ curvilineâ propoſita, quæ unâ vel pluribus proprietatibus definitur, Quadratura vel Area dictæ Figuræ, accurata, ſi poſſibile ſit, ſin minùs, infinitè vero propinqua; Evolutio vel Longitudo Lineæ curvæ; Centrum Gravitatis Figuræ; Solida ejus rotatione genita, & eorum Superficies, ſine ullâ Radicum Extractione, obtineri queant; quo invento, ait Celeberrimus FONTENELLIUS (*f*), nihil ſubtilius nihil felicius excogitari poteſt ad opem humani intellectûs imbecillitati ferendam.

Tamen tanta erat NEWTONI modeſtia, ut (*g*) *maturam ad ſcribendum*

(*a*) Pembert. *Pref. in a View of Sir* Iſaac Newton's *Philoſophy*.
(*b*) Vide Tom. I. hujus, pag. 329 -- 332.
(*c*) Vide Tom. II. hujus, pag. 379.
(*d*) Comm. Epiſtol. N°. XXIV. pag. 103. edit. ſec.
(*e*) Hæ chartæ ſunt *Analyſis per Æquationes numero Terminorum infinitas.*
(*f*) Loco citato.
(*g*) Vide Tom. I. hujus, pag. 333.

Digitized by Google

dum ætatem expectaret, licèt, vel MERCATOREM ipſum jam *noſſe* (*a*) *Extractionem Radicum æquè ac Diviſionem*, *vel alios ſaltem*, *Diviſione patefactà inventuros reliqua* ſuſpicaretur; id eſt, licèt alios inventionis gloriam occupaturos putaret. Libellus igitur de *Seriebus*, quem conſcripſerat, communicatus tantummodo fuit cum COLLINSIO & *Vice-Comiti* BROUNCHERO. Electus fuit anno 1669. Mathematum Profeſſor in Univerſitate *Cantabrigienſi*, quam Provinciam BARROVIUS abdicaverat. Eodem anno & duobus proximis publicè prælegit *Lectiones Opticas*, illas, quas nos exhibuimus (*b*), quæ, in Anglicum ſermonem converſæ, editæ fuerunt *Londini* anno 1728 in 8vo., & poſtea Latinè, quemadmodum ſcriptæ fuerant pariter Londini an. 1729 in 4°. Ibi continentur ea, quæ de Luce & Coloribus detegere cœperat anno 1666, & de quibus docuit *Regiam Societatem* anno 1671, ſcripto quodam, quod inſertum fuit *Philoſophicis Tranſactionibus* Februarii 19 an. 1672. N°. 80. (*c*). Hinc ortæ ſunt plures controverſiæ, quæ NEWTONUM, illarum inimiciſſimum, à *Lectionibus* ipſis edendis cum *Tractatu de Methodo Serierum infinitarum & Fluxionum* abſterruerunt (*d*). In iiſdem *Tranſactionibus* Martii 28 an. 1672 N°. 81. deſcripſit novum *Cata-Dioptricum Teleſcopium* à ſe excogitatum, quam deſcriptionem Doctiſſimus *Abbas* GALLOIS inſeruit in Eruditorum Diario Februarii 29 an. 1679, additâ HUGENII Epiſtolâ (*d*), quâ Vir omni laude major oſtendit quot & quantis commodis hoc genus Teleſcopia cetera antecellant. Adſunt in *Philoſophicis Tranſactionibus* alia ſcripta (*e*) ad Teleſcopium hoc, & ad novam Theoriam de *Luce & Coloribus* pertinentia, quæ Auctoris ingenium, diligentiam, atque perſpicacitatem in propatulo ponunt. Anno 1672 edidit *Cantabrigiæ* in 8vo. librum, cui titulus *Bernardi* VARENII *Geographia generalis*, *in quâ affectiones generales Telluris explicantur*, *aucta & illuſtrata ab* ISAACO NEWTON, quæ rurſus excuſa fuit, pariter in 8vo., anno 1687; ſed ea, quæ NEWTONUS, publicæ utilitati ſtudens, & gloriam ſuam negligens, contulit ad eam augendam & illuſtrandam, ita cum reliquis confuſa ſunt, ut ab iis diſtingui, nedum ſeparari nequeant. Hyeme illo, qui finis fuit anni 1676, & principium anni 1677, NEWTONUS demonſtravit quòd, *ſi vires centripetæ reciprocè ſint ut Quadrata diſtantiarum*, *Planeta motu ſuo deſcribet Ellipſim circa Centrum virium ſitum in inferiore Ellipſeos Foco*, &, *Radiis ad hoc Centrum ductis*, *Areas deſcribet Temporibus proportionales*. Anno 1683 hoc argumentum rurſus meditari cœpit, & jam detectæ Propoſitioni nonnullas alias ad cœleſtia Corpora ſpectantes adjecit; inter quas non ultimum locum occupat Demonſtratio notiſſimæ illius *Keplerianæ* Propoſitionis, quòd, ſcilicet, *Planetæ in Ellipſibus moventur*; &, *ſi Radii ducantur*

(*a*) Tom. II. pag. 75. &c.
(*b*) Tom. II hujus, pag. 279.
(*c*) Vide Tom. I. hujus, pag. 334.
(*d*) Vide Tom. II. hujus, pag. 295. ad 300.
(*e*) Vide Tom. II. hujus, p. 301. ad 409.

Digitized by Google

tur ad Solem ſitum in inferiore Ellipſeos Foco, Areas Temporibus proportionales deſcribunt. Hanc Demonſtrationem miſit Celeberrimo HALLEIO menſe Decembri 1684, qui eam cum *Regali Societate* communicavit, & in hujus Tabulariis inſcripta fuit. Celeberrima hac *Societate* rogante, & HALLEIO etiam pervicaciter contendente, ad id adductus tandem fuit NEWTONUS, ut ſua *Principia* ſcriberet, quorum duo priores libri manu exarati *Regali Societati* lecti fuerunt; ſed, cùm HOOKIUS ſe ante noſtrum Auctorem KEPLERI Problema demonſtraviſſe contenderet, tertium librum ſupprimere ſtatuit NEWTONUS, quod tamen ne faceret ejus Amici exoraverunt. Aſſerit PEMBERTONUS (*a*), quòd prima cogitata, quibus ad *Principia* ſua manuductus fuit, ei in mentem venerunt anno 1666, cùm *Cantabrigiâ*, metu Peſtilentiæ, receſſiſſet. Nam, ſolus in hortis deambulans Gravitatis vim, (aliqui dicunt à pyro cadente admonitus) conſiderare cœpit; quòd, nempe, quoniam hæc vis ſenſibus non deprehenditur imminuta ad maxima à Terræ Centro intervalla, ad quæ pervenire liceat, neque ad faſtigia altiſſimorum ædificiorum, neque etiam ad ſublimiorum montium cacumina inde conficiendum probabiliter videtur, quòd hæc vis multo latiùs patet, quàm vulgo credi ſoleat; quidni ad Lunam uſque, tacitus dicebat? Si verò ita ſe res haberet, certè vim iſtam Lunæ motus ſentiret, & ab eâ fortaſſe Luna in orbitâ ſuâ retineretur. Quanquam autem vis Gravitatis non mutetur, (quod quidem ſenſibus percipi poſſit,) exiguis mutationibus intervallorum à Centro telluris, ad quæ evadere poſſumus, tamen arbitrabatur fieri poſſe, ut hæc vis multò minor eſſet apud Lunam, quàm apud nos. Detecturus quanta eſſet hæc imminutio, ſecum ipſe reputabat, quòd, ſi Lunam in orbe ſuo retinet vis Gravitatis, procul dubio Planetæ primarii circa Solem à non abſimili vi circumducuntur. Et, plurium Planetarum Periodos cum eorumdem à Sole intervallis comparans, invenit, quòd, ſiquæ vis Gravitati ſimilis Planetas in ſuis orbitis continet, hæc decreſcere debet in duplicatâ ratione incrementorum diſtantiarum; ad quam concluſionem venit, ponens Planetas accuratè deſcribere Circulos Soli concentricos, à quibus quidem circulis orbes à pluribus Planetis deſcripti vix differunt. Igitur, ſupponens vim Gravitatis, ad Lunam uſque ſe extendentem, in eâdem ratione decreſcere, rationes ſubducere cœpit, perſpecturus utrùm hæc vis ad Lunam in orbitâ ſuâ retinendam ſufficeret. Cùm verò tunc libris deſtitueretur, poſuit, quemadmodum Geographi paſſim, & Angli Nautæ, antequam NORVOODUS Terram eſſet dimenſus, arbitrabantur, quòd unus Latitudinis gradus in terreſtri ſuperficie ſexaginta milliaria Anglica complectitur; ſed, quoniam hæc hypotheſis à verò non parum aberrat, quandoquidem ſinguli gradus novem & ſexaginta

(*a*) Pembert. *Pref. in à View of Sir* Iſaac Newton's *Philoſophy.*

Digitized by Google

ſexaginta milliaria Anglica cum dimidio, circiter, continent, hinc factum eſt, ut ejus rationes ſpem fallerent; hinc opinatus eſt aliquam aliam cauſam ſaltem jungendam eſſe vi Gravitatis in Lunam agentis. Eâ de re hujus argumenti conſiderationem aliquamdiu intermiſit. Sed aliquot annis pòſt HOOKII epiſtola eum excitavit ad inveſtigandum quamnam Lineam reipſâ deſcribat corpus è ſublimi cadens, ſi Terræ circa ſuum Axem motus non negligatur. Hujuſcemodi Corpus, cùm ſervet motum illum, quem Terræ revolutio tribuit loco, quem cadendo deſerit, conſiderari debet tanquam anteriorem partem verſus projectum, & ſimul tractum deorſum, ad Terræ Centrum. Hinc iterum ad meditandum Lunæ motum animum adjecit; atque uſus Terræ dimenſionibus, quas paulò priùs Celeberrimus PICARTUS conſtituerat, Lunam in orbe ſuo retineri à ſolâ Gravitatis vi perſpexit: unde ſequebatur hanc vim decreſcere quò magis à Terræ Centro receditur, quemadmodum ipſe jampridem conjecerat. Ex hoc principio deduxit Lineam à cadente Corpore deſcriptam eſſe Ellipſin, cujus Focus alter eſt Terræ Centrum. Et, quoniam primarii Planetæ circa Solem in gyrum acti Ellipticos Orbes deſcribunt, diſquiſitionem hanc, quam animi gratiâ ſuſceperat, ad altiora poſſe accommodari non ſine voluptate cognovit. Compoſuit igitur, duodecim, præterpropter, Propoſitiones ad Planetarum præcipuorum circa Solem motum pertinentes. Aliquot pòſt annis, ſermonibus HALLEII, qui, eum inviſurus, *Cantabrigiam* petierat, eo adductus eſt, ut rurſus meditationes ſuas ad hoc argumentum converteret, atque inde de hac re librum, cui titulus *Philoſophiæ naturalis Principia mathematica* divulgavit. Hic liber tot, & tam accuratè excogitatarum rerum plenus, duodeviginti menſibus conſcriptus fuit, quamquam ferè nullam, præter eam quam retulimus, ſuppellectilem ſibi paraviſſet. Hactenus PEMBERTONUS. Hic liber primò editus fuit *Londini* in 4°. anno 1687; atque iterum pluribus in locis ab Auctore auctus & emendatus *Cantabrigiæ* anno 1713 in 4° curante *Rogero* COTTESIO, Viro illuſtriſſimo, & in eâ Univerſitate Aſtronomiæ atque Phyſicæ experimentalis Profeſſore: Tertiò *Amſtelodami*, anno 1714; & denique *Londini* anno 1726 curâ *Henrici* PEMBERTONI rurſus auctus. Hic liber, (juxta FONTENELLIUM (*a*),) in quo novum Philoſophiæ Syſtema profundiſſimæ Geometriæ ſuperſtruitur, ſtatim omnes illas laudes non obtinuit, quas merebat, & quas aliquando habiturus erat. Quoniam acutiſſimè cogitata multa paucis verbis efferuntur, & ex principiis ſummâ celeritate deducuntur ea, quæ inde confici poſſunt, atque Lector non pauca, quibus principia & concluſiones connectantur, proprio marte ſupplere debet, tempore opus erat ut intelligeretur. Mathematicorum Principes diligentem & ſedulam operam illi navare coacti ſunt,

[*a*] Hiſt. de l'Acad. Royale des Sciences, An. 1727. Elog. de *Mr. Newton.*

& ii, qui minùs ingenio & doctrinâ pollebant, illud mare navigare non ſunt aggreſſi, niſi quando Principum teſtimonia animos addiderunt. Sed tandem, quando libri pretium ſatis perſpectum fuit, undique concurrerunt ſuffragia, quæ tam lentè ſibi adquiſiverat, & omnia plauſus compleverunt. Omnes mirati ſunt mentem rerum inventricem, & quaſi creatricem, mentem, quæ, ſi minus modeſta fuiſſet, meliori, quàm LUCRETIUS, jure exclamare potuiſſet,

> Avia Pieridum peragro loca, nullius antè
> Trita ſolo; juvat integros accedere fontes,
> Atque haurire . . . .

mentem, quam in ſæculo feliciſſimo vix unus aut alter è totâ Doctorum Republicâ ſortiuntur. Et, quò quiſque magis ingenio pollebat, eò magis mirabatur, ita ut HOSPITALIUS ille, Eruditorum nobiliſſimus, & Nobilium eruditiſſimus, ab Anglis (*a*) eum inviſentibus petere ſoleret, NEWTONUS-*ne veſter, edit, bibit, dormit, ut homines alii faciunt? Ego quidem illum mihi fingo tanquam Genium*, & mentem à corporeis vinculis omninò ſolutam. Innituntur *Principia Mathematica* duabus præcipuè *Theoriis*, doctrinâ virium centralium, & Mediorum reſiſtentiâ: utraque ferè prorſus nova eſt, & per ſublimem Auctoris noſtri Geometriam explicata. KEPLERUS ex cœleſtibus TICHONIS obſervationibus tria confecerat. *Primò*, quòd iidem Planetæ æqualibus temporibus æquales Areas circa Solem deſcribunt. *Secundò*, quòd per Ellipſes moventur, in quarum communi Foco eſt Sol. *Tertio*, quòd, in diverſis Planetis, Quadrata ex temporibus periodicis ſunt ut Cubi ex tranſverſis Orbitarum Diametris. Ex *primo* Phænomeno confecit Auctor Planetas verſus Centrum Solis attrahi. Ex *ſecundo* vires hujus attractionis eſſe, reciprocè, ut Quadrata ſpatiorum, quibus Planetæ diſtant à Solis Centro. Ex *tertio* denique Planetas omnes eandem Centripetam vim ſentire. Eodem anno, quo *Principia* iſta fuerunt edita, Rex JACOBUS II. privilegia Univerſitatis *Cantabrigienſis* aggreſſus eſt, pro quibus, inter alios, acerrimè ſtetit NEWTONUS, qui fuit inter illos, quos Univerſitas ad *Alti Confeſſus* Curiam delegavit. Electus pariter fuit unus ex ejus Membris; dum anno 1688. *Pactionis Comitia* fuerunt coacta, quibus adſuit quamdiu manſerunt. Anno 1696 Illuſtriſſimus MOUNTAGUE, tunc *Scaccarii Cancellarius*, & poſtea *Comes Hallifaxius* illi à Rege GULLIELMO munus Cuſtodis pecuniæ feriundæ obtinuit, quo munere dum fungeretur, eximia fuit ejus opera quando nummi jam cuſi novis imaginibus ſignandi fuerunt. Tribus annis pòſt creatus fuit Magiſter Fabrorum nummos cudentium, unde non exiguum lucrum ei redibat, & hoc munere, quoad vixit, potitus.

(*a*) *Des Maizeaux.* Recueil de diverſes Pieces ſur la Philoſophie &c. Pref.

potitus eſt. Anno 1699 in *Regiam Scientiarum Academiam*, quæ *Lutetiæ Pariſiorum* floret, cooptatus fuit. Anno 1701 iterùm ab Univerſitate *Cantabrigienſi* Comitiorum Membrum electus fuit. Anno 1703 creatus fuit Præſes *Regalis* apud *Londinenſes Societatis*, quam Dignitatem per totum vitæ ſuæ tempus, hoc eſt, tres & viginti continuos annos, obtinuit. Anno 1704 edidit *Londini* in 4°. ſuam *Opticam*, ſeu librum de Reflexionibus, Refractionibus, Inflexionibus, & Coloribus Lucis; qui liber auctus iterùm typis excuſus fuit pariter *Londini* anno 1718 in 8vo., ac tertiò anno 1721 in 8vo. In Latinam linguam verſus ex primâ editione à Celeberrimo *Samuele* CLARKE editus fuit *Londini* anno 1706 in 4°. & ex ſecundâ anno 1719 pariter *Londini* in 4°. Illuſtris *Petrus* COSTE eumdem Gallicâ Linguâ donavit ex editione ſecunda, & ſic verſum edidit *Amſtelodami* 1720 in 12mo. in duo volumina diviſum, & *Lutetiæ Pariſiorum* eadem forma anno 1722. Juxta ingenioſiſſimum FONTENELLIUM (*a*) hic liber totus circa Lucis Anatomiam verſatur. Tenuiſſimus Lucis Radius in cubiculum prorſus obſcurum intromiſſus, (qui tamen, quantumvis ſit exilis, ſemper eſt quaſi *Faſciculus* ex infinito Radiorum numero conſtans,) ita dividitur & diſſecatur, ut exhibeat tandem elementares componentes Radios ab aliis ſegregatos, atque ſingulos propriis Coloribus imbutos, &, poſt hanc ſeparationem, nullis mutationibus obnoxios. Omnes hi Radii diverſimodè colorati, ſi commiſceantur, eo ipſo Albedinem, quâ totus Radius præditus eſt, conſtituunt atque progignunt. Primigenii & colorati Radii, numquam fortaſſe ſeparari potuiſſent, niſi ita naturâ comparati fuiſſent, ut, dum idem Medium, idem vitreum Priſma tranſmeant, ſub diverſis Angulis refringerentur, & hoc pacto, ad commoda intervalla excepti, diſgregati comparerent. Hæc varia rubei, flavi, viridis, cœrulei, purpurei, & aliorum mediis coloribus diſtinctorum quamplurium Radiorum refrangibilitas, de quâ nulla fuerat ſuſpicio, & ad quam vix conjiciendo poterat deveniri, eſt præcipua veritas circa quam hic NEWTONI liber verſatur. Ab hac ducimur ad variam reflexibilitatem. Quinimo, radii ſub eodem angulo ſuper eamdem ſuperficiem cadentes alternè refringuntur & reflectuntur. Præterea, Radii qui prope Corporum extremitates tranſeunt, licèt illa non tangant, attamen à Linea rectâ detorquentur, quæ ſola res non primùm NEWTONO perſpecta fuit, & *inflexio* nuncupatur. Ex his omnibus exſurgit nova Optica, ab aliis tam diverſa, ut hæc Scientia tota Auctori noſtro debita videatur. Huic libro, cum primùm editus fuit, ſubjecit Tractatus duos, *de Speciebus & magnitudine Figurarum curvilinearum*, hoc eſt, *de Quadraturâ Curvarum*, & *Enumeratio Linearum tertii ordinis*, quos deinde ſuſtulit, quia de rebus nimiùm ab Opticâ alienis agebant. Anno 1705 Eques creatus fuit ab ANNA Reginâ.

[*a*] Mémoir. de l'Acad. Royal. des Sciences, an. 1727. Elog. de *Mr. Newton.*

Anno 1707 *Cantabrigiæ* primùm edita fuit ejus *Arithmetica Univerſalis, ſive de Compoſitione & Reſolutione Arithmeticâ liber*; idque inſcio Auctore, atque etiam, quando reſcivit, ægrè ferente (*a*). Illum ſcripſerat NEWTONUS triginta ferè annis antequam ederetur, anno nempe 1677, cùm Mathemata *Cantabrigiæ* profiteretur, & quidem currenti calamo, pro urgentis officii ratione, & ejus exemplum, pro more, in Univerſitatis Tabulariis reliquerat, unde editus fuit. Secundò editus fuit *Londini* anno 1722; ſed in ſtatu perfectiore, (ut Clariſſimi s'GRAVESANDE verbis utar (*b*),) ut quis facile percipiat non omninò fœtum abdicâſſe Virum Celeberrimum. Eundem ſatis amplo Commentario, quem ſuadente eodem s'GRAVESANDE jam diu perfeci, in lucem proditurum propediem, & hoc ipſo fortaſſis anno, ſpero. Anno 1711 vulgata fuit ejus *Analyſis per Quantitatum Series, Fluxiones, & Differentias, cum Enumeratione Linearum tertii ordinis*, *Londini* in 4°. à *Gulielmo* JONES, Armigero, qui primùm illam reperit inter ſcripta *Joannis* COLLINSII, quæ anno 1669 à BARROVIO acceperat. Anno 1712 plures NEWTONI epiſtolæ impreſſæ fuerunt in libello, cui titulus *Commercium Epiſtolicum* D. Joannis COLLINS *& aliorum de Analyſi promotâ, juſſu Societatis Regiæ editum.*

GEORGIO I. regnum obtinente meliùs etiam in Aulâ cognitus fuit NEWTONUS, quandoquidem ornatiſſima *Walliæ* Princeps, ac deinde *Britanniæ* Regina illum pluribus de rebus ad ſublimiores diſciplinas pertinentibus interrogare ſolebat, & à reſpondentis ore pendebat; ita ut ſæpè ſe felicem prædicaverit, cui eodem, quo NEWTONUS, tempore vivere, illúmque audire contigiſſet. Scripſerat hic de Chronologiâ librum, quem in lucem non emittere decreverat; at optima Princeps, cum quâ præcipua ſui Syſtematis chronologici capita communicaverat, tantum novitatis & ingenii in illis perſpexit, ut ſibi ſummarium optaverit, quod nemini daret, & apud ſe ſummâ fide & diligentiâ ſervaret. Veruntamen unum hujus Summarii exemplum in Galliam pervenit, ubi in Gallicam Linguam converſum fuit & editum *Lutetiæ Pariſiorum*, cum nonnullis in illud obſervationibus. Quapropter NEWTONUS Tranſactionibus Philoſophicis inſeruit animadverſiones quaſdam in has obſervationes, quæ animadverſiones itidem Gallicâ Linguâ donatæ fuerunt, typiſque divulgatæ *Lutetiæ Pariſiorum* anno 1726 in 8vo. cum epiſtola Excellentiſſimi *Abbatis* CONTI, qua reſpondebat ad nonnulla, quæ de eo dixerat NEWTONUS in ſuis animadverſionibus. Anno autem 1728 ipſa Chronologia edita fuit *Londini* in 4°. In eo libro præcipuè de hoc agitur, ut acutè ſanè & ingenioſè, legendo tenuiſſima nonnulla vetuſtioris Græcorum Aſtrologiæ veſtigia, inveſtigetur quemnam locum tempore *Chironis Centauri* Colurus.

[*a*] s'*Graveſande* præfat. in Arithm. Univerſ. *Newtoni* edit. *Lugd. Batav.* 1732.
[*b*] Ibidem.

Digitized by Google

Colurus Æquinoctiorum occuparet. Siquidem, quoniam hodie notum eſt fixas Stellas unum in Longitudinem Gradum peragrare ſpatio annorum duorum & ſeptuaginta, ſi ſciremus per quas Stellas tranſiret Colurus ille CHIRONIS temporibus, dimetiendo intervallum, quo diſtant Stellæ, per quas nunc tranſit, ab illis per quas tunc tranſibat, facilè quot anni à *Chironis* tempore ad præſens elapſi ſint, determinaretur. Et, quia CHIRON fuit inter *Argonautas*, hinc notiſſimæ hujus expeditionis, & idcirco *Trojani* belli tempus definiretur, duorum nempe maximorum facinorum, ex quibus tota vetus Chronologia pendet. Ea ſtatuit NEWTONUS totis annis quingentis recentiora, quàm alii vulgò Chronologi. Contra hoc Syſtema ſcripſerunt duo docti *Galli*, atque tres *Angli*, *Arthurus* BEDFORD, & *Samuel* SHUCFORD in præfatione ad ſecundum Volumen ſuæ *Connexionis Hiſtoriæ ſacræ atque profanæ*, atque WARBURTON in Sectione V. Lib. IV. *de Divinâ Moſis legatione*. Ceterùm non tantùm ſuis laboribus orbem litteratum ditavit, ſed etiam alios ad idem compulit, ut de ſe teſtatur VOODWARDUS (*a*).

Bonâ valetudine uſus eſt ad octogeſimum ætatis annum uſque, quo urinæ incontinentiâ affligi cœpit; attamen quinque ſequentibus annis, per ſatis magna intervalla bene ſe habuit, aut certè non malè, quod prudenti victûs ratione, curiſque, quarum antea non indiguerat, efficiebat. Provinciam ſuam curandæ Monetæ Nobili Viro CONDUITTO, qui NEWTONI Neptem uxorem duxerat, demandare coactus fuit. Magnos dolores nunquam perpeſſus eſt præter viginti poſtremos vitæ ſuæ dies; tunc pro certo creditum eſt eum calculo laborare, & valetudinem recuperare non poſſe. Dum tantis doloribus cruciabatur, ut ſudor largiter per vultum difflueret, nunquam ejulatum edidit, aut eos ægrè ſe ferre teſtatus eſt, &, ſi qua dabatur quies, ſubridere ſtatim, ut ſolebat, & lætâ facie loqui. Semper aliquot horas quotidie lectioni aut ſcriptioni dederat. Scripta, quibus quid novi acciderit, enarratur, legit die Sabbathi duodeviceſimo Menſis Martii anno 172$\frac{6}{7}$, & diutiùs cum Celeberrimo MEADIO, quo Medico utebatur, collocutus eſt, atque omnino ſenſuum & mentis compos erat, ſed ſub veſperam mente lapſus eſt, nec unquam ſibi redditus. E vitâ deceſſit proximo die Lunæ, viceſimo ejuſdem menſis, natus annos octoginta quinque. Compoſitum fuit ejus cadaver in lecto funebri ad pompam ornato in Cubiculo *Jeroſolymæ Weſtmonaſterii*, unde efferuntur Magnates, & aliquando Reges. Latum ad ſepulturam fuit in Abbatia *Weſtmonaſterii*, & pallam, ſeu ſtragulum, quo feretrum obductum erat, ſuſtinebant ſupremus Angliæ Cancellarius, Dux Montroſæ, Dux Roxburgi, Comes Pembrockiæ, Comes Suſſexii, & Comes Macclesfieldii. Epiſcopus Rocheſtriæ, quem omnes ejus Eccleſiæ Clerici co-

†††† 3 mitaban-

[*a*] Voodward. ad calcem ſui libri, cui titulus *Foſſils of all Kinds digeſted in to a Method ſuitable.*

mitabantur; funereas preces recitavit. Cadaver ſepultum fuit ubi aditus eſt ad Chorum. Ejus Familia monumentum illius memoriæ poſuit, in quo inſculptum fuit hoc Epitaphium :

H. S. E.

ISAACUS NEWTONUS Eques Auratus:
QUI ANIMI VI PROPE DIVINA
PLANETARUM MOTUS, FIGURAS,
COMETARUM SEMITAS, OCEANIQUE ÆSTUS,
SUA MATHESI FACEM PRÆFERENTE,
PRIMUS DEMONSTRAVIT.
RADIORUM LUCIS DISSIMILITUDINES,
COLORUMQUE INDE NASCENTIUM PROPRIETATES,
QUAS NEMO ANTE SUSPICATUS ERAT,
PERVESTIGAVIT.
NATURÆ, ANTIQUITATIS, S. SCRIPTURÆ,
SEDULUS, SAGAX, FIDUS INTERPRES.
DEI O. M. MAJESTATEM PHILOSOPHIA APERUIT,
EVANGELII SIMPLICITATEM MORIBUS EXPRESSIT.
SIBI GRATULENTUR MORTALES
TALE TANTUMQUE EXTITISSE
HUMANI GENERIS DECUS.
NAT. xxv. DEC. A. D. MDCLII. OBIIT
MART. xx. MDCCXXVI.

Deinde Poëta ſummus *Alexander* POPE hoc Epitaphium in ejus honorem conſcripſit.

ISAACUS NEWTONUS
QUEM IMMORTALEM
TESTANTUR TEMPUS, NATURA, COELUM:
MORTALEM
HOC MARMOR FATETUR.

&

Digitized by Google

& id quidem latinè, ſequitur autem diſtichum anglicum, quod ſic exprimere conati ſumus.

Naturam, legéſque ſuas nox atra tegebat :
Sit NEWTONUS, *ait Deus, & Lux cuncta fuerunt.*

Fuit ſtaturâ mediocri, & ſubpinguis, ſaltem ſenex. Vultu fuit jucundo ſimul & venerando, præſertim, cùm, fictitiâ comâ ablatâ, veram detegeret canam denſamque. Nunquam perſpicillis uſus eſt, & unum dentem amiſerat. Fuit illi, juxta FONTENELLIUM, acies oculorum vivida & acris, ſed juxta alios, qui NEWTONUM noverunt, & præſertim juxta Epiſcopum *Atterburyienſem*, in quâdam epiſtolâ, res longè aliter ſe habebat; ſaltem, inquit ille, viginti ab hinc annis, quo tempore, circiter, illum noſcere cœpi. Neque in vultu, neque in agendo acutam illam ſagacitatem, quæ in ejus libris deprehenditur, præſeferebat; quin potiùs languorem quemdam, qui nihil magni pollicebatur illis, qui eum ignorabant. Leniſſimus erat, & pacis ſtudioſiſſimus. Maluiſſet obſcuram agere vitam, quàm in illas lites & controverſias incidere, quibus Viri ingenio doctrinàque præſtantiſſimi ſunt obnoxii. Hinc factum eſt, ut *Lectiones Opticas*, & *Methodum Fluxionum & Serierum infinitarum*, quamvis jam Typis paratas, ſuppprimeret, ſiquidem, ut ait ipſe (*a*), ſubortæ ſtatim per diverſorum Epiſtolas, (objectionibus, aliiſque refertas,) crebræ interpellationes me prorsùs à conſilio deterruerunt, & effecerunt ut me arguerem imprudentiæ, quòd, umbram captando, eatenus perdideram quietem meam, rem proiſus ſubſtantialem. Sed, obſervat FONTENELLIUS (*b*), hac umbrâ fraudatus non fuit, neque ut eam ſibi compararet, amiſit quietem, quam tanti faciebat, & inſuper ex hac umbrâ tantum veræ felicitatis, quantum ex quiete, accepit. Modeſtiâ fuit ſummâ, & ab ea ne latum quidem unguem diſceſſit, quamvis omnes in illam conſpirarent. Semper ita de ſe, & de aliis locutus eſt, ut ab omni vel minimâ jactantiæ ſuſpicione remotus unicuique, etiam iniquiſſimo, videretur. Simplex erat & affabilis, atque, ad cujuſque captum ſe accommodans, omnibus parem ſe præſtabat. Nunquam à vitæ communis officiis immunem redditum ingenio, aut famâ, quibus pollebat, ſe credidit. Quamquam Eccleſiæ Anglicanæ foret addictus, nunquam tamen aliter ſentientes vexaviſſet, ut illos ad eam revocaret; non quia Religionem naturalem dumtaxat admitteret, nam Revelationi firmiter adhærebat, ita ut inter tot libros, quos aſſiduè verſabat, nullum ſæpiùs & attentiùs legeret, quàm Sacra Volumina. Nullam ſe beneficum præſtandi neglexit occaſionem, in quâ re ſibi indulgere poterat,

[*a*] Epiſtola poſt. ad *Oldemb.* Tom. I. pag. 334. hujus.
[*b*] Loco ſæpè citato.

rat, quandoquidem & avitâ re opimâ, & quæſtuoſo munere potiebatur, quos reditus prudentiſſimâ diſpenſatione augebat. Splendidus enim erat & magnificus, quando res ferebat, ceteroquin frugi, & ab omni divitiarum oſtentatione, & apparatûs atque deliciarum ſtudio alieniſſimus. Hinc factum eſt, ut non ſemel in affines, ſeu potiùs in indigos quoſcunque liberaliſſimus eſſe poſſet. Cùm teſtamento largiri donum non putaret, inteſtatus mortuus eſt, & reliquit triginta & duo millia librarum *ſterlinarum*, rerum quidem mobilium. Ceterùm, uxorem nunquam duxit. Quamquam, cum jam eſſet magno natu, & morti proximus, memoriâ minus firmâ uteretur, attamen libros ſuos intelligebat (*a*); quod, (ait PEMBERTONUS,) adverſatur iis, quæ à pluribus audivi. Cujus rei ratio fortaſſis eſt, quòd aliquando minùs ad ſermones de hiſce rebus habendos paratus erat, quàm optabatur. Sed animadvertendum eſt magnos Viros animo non raró peregrè eſſe, non ſolùm quando agitur de rebus ad vitam pertinentibus, ſed etiam quando res eſt de ſcientiis, quibus præcipuam operam navârunt. Inventores non eodem, quo reliqui, pacto cogitata in mente congerere & diſponere videntur. Etenim, quoties illa proferre debent, partim ſaltem quodammodo rurſus inveſtigare coguntur; ideò non ſemper ſibi ſunt æquales: ſed illi, qui res ope firmæ memoriæ retinent, ſæpè inventoribus ipſis peritiores videntur. Ab eodem diſcimus NEWTONUM pauciores, quàm quis crederet, ex recentioribus Mathematicis legiſſe; ſed inveniendi facultas, quæ miranda in illo erat, facilè illi ſufficiebat, quæ neceſſaria erant ad proſequendum argumentum, quod ſuſceperat. Sæpiùs ſe reprehendebat quòd res merè geometricas algebraicis rationibus tractaviſſet, & quòd libro ſuo de Algebrâ *Arithmeticæ Univerſalis* titulum poſuiſſet, melius aſſerens CARTESIUM ſuum de re eâdem volumen dixiſſe *Geometriam*, ut ſic oſtenderet has computationes ſubſidia tantùm eſſe Geometris ad inveniendum. Magni faciebat SLUSIUM, BARROVIUM, & HUGENIUM, qui hac corruptelâ vitiari ſe non ſiviſſent. Commendare ſolebat laudabile incœptum *Hugonis de Omerique*, qui veterum Analyſim reſtituere tentaverat, & ſummo in pretio habebat APOLLONII libros de *Sectione Rationis*, quia, cujus generis eſſet hæc Analyſis, perſpicuè demonſtrant. Quamquam BARROVIUS inveniendi facultate non minùs, quin etiam fortaſſe magis valeat, quàm recentiorum quilibet, præter Auctorem noſtrum, tamen NEWTONUS præcipuè HUGENIUM commendare ſolebat, quem recentiorum elegantiſſimum & optimum Veterum imitatorem nuncupabat. Horum inſtitutum & demonſtrandi rationem vehementer mirabatur, ſemet ipſe reprobans, quòd non magis illis adhæſiſſet; lugebat errorem, in quo ſe incidiſſe dicebat, cùm, quando Matheſi cœpit incumbere, CARTESII, aliorúmque de Algebrâ Scriptorum libris ſeſe totum tradidiſſet non priùs, quantâ

[*a*] *Pemberton A View of Sir Iſaac Newton's Philoſophy.* Præf.

Digitized by Google

quantâ par erat diligentiâ conſideratis EUCLIDIS Elementis, quæ, ut alia Veterum Geometrarum ſcripta tanti faciebat, (*a*) ut dicere ſoleret nihil neceſſe futurum de Geometriâ atque adeò univerſâ Matheſi ſcribere, ſi veterum commentationes ad nos perveniſſent. Poſtquam ei creditum fuit munus argenti feriendi nihil magni, quod ad Philoſophiam & Matheſes attineret, aggreſſus eſt. Nam, quamvis pro magno inccepto haberi poſſit ſolutio notiſſimi Problematis de *Trajectoriis*, quod Anglis, tanquam ingenii lapis lydius propoſuerat LEIBNITIUS cum illis contendens, & quod, utpote intricatiſſimum & difficillimum, elegerat, tamen ludus jocúſque fuit, NEWTONO, qui ut aſſeritur illud ſub veſpere recepit revertens ex æde, in quâ nummi conflantur, & quidem laſſus, atque illud ſolvit, antequam cubitum abiret. Diſſertationes plures de Antiquitatibus, Hiſtoriâ, Theologiâ, Chymiâ, aliiſque argumentis reliquit. Refert Clariſſimus COSTIUS (*b*), quòd cum aliquando cum NEWTONO colloqueretur de iis, quæ habet LOCKIUS in libro ſuo de Mente Humanâ lib. IV. Cap. X. §. 18. quòd, ſcilicet, fieri poſſet, ut quamvis imperfectè, aliquo tamen pacto cognoſcatur quomodo materies Dei virtute creata fuerit, ab illo audivit ſe auctorem eſſe hujus explicationis, quam indicat LOCKIUS; illam ſibi in mentem veniſſe dum de hoc re verba faceret cum eodem LOCKIO, & Anglo quodam non minus ingenio & doctrinâ, quàm genere claro, & hanc eſſe. Aliquo pacto, aiebat, intelligere liceret quo pacto Materies creata fuerit, ſi ſupponeretur Deum ſuâ potentiâ vetuiſſe ne quid penetrare poſſet in certam Spatii partem, quod purum Spatium naturâ eſt penetrabile, æternum, neceſſarium, infinitum; ſic enim illa Spatii pars impenetrabilitate gauderet, quæ qualitas de Materiei eſſentiâ eſt: &, quoniam purum Spatium omnino uniforme eſt, ſupponi poſſet Deum hoc impenetrabilitatis genus alteri Spatii parti impertiviſſe, & hinc quodammodo ideam mobilitatis haberemus, quæ iterum qualitas ad eſſentiam materiei pertinet.

(*a*) Auctor Verſionis Gallicæ Chronol. Newt. in Præfat.
(*b*) Eſſai Philoſoph. de Locke traduit par Mr. Coſte Edit. ſec. 1729.

Digitized by Google

INDEX OPUSCULORUM TOMI PRIMI.

OPUSCULUM I.

Analyſis per Æquationes numero Terminorum infinitas, pag. 3

OPUSCULUM II.

Methodus Fluxionum & Serierum infinitarum, cum ejuſdem applicatione ad Curvarum Geometriam,

Introductio. *De Reſolutione Æquationum per Series infinitas*, 31

Problema I. *Datâ Relatione, quam invicem habent fluentes Quantitates, determinare Rationem, quæ inter earum Fluxiones intercedit*, 55

Problema II. *Datâ Æquatione, quæ contineat Quantitatum Fluxiones, invenire quam Relationem habeant inter ſe hæ Quantitates fluentes*, 61

Problema III. *Quantitatum* maxima *&* minima *determinare*, 86

Problema IV. *Ducere Tangentes ad Curvas*, 89

Problema V. *Determinare Quantitatem Curvaturæ, quam habet data quævis Curva in dato Puncto*, 104

Problema VI. *Determinare Qualitatem Curvaturæ ad datum Punctum cujuslibet Curvæ*, 125

Problema VII. *Reperire quotlibet Curvas, quarum Areæ poſſint exhiberi finitâ Æquatione*, 137

Problema VIII. *Invenire quotlibet Curvas, quarum Areæ ad Ar-*

eam cujuſcunque datæ Curvæ habeant Relationem expoſitam finitâ Æquatione, 132
Problema IX. *Determinare Aream cujuſcunque Curvæ propoſitæ*, 134
Problema X. *Invenire quotlibet Curvas, quarum Longitudo finitâ æquatione poſſit exprimi*, 176
Problema XI. *Invenire quotlibet Curvas, quarum Longitudines comparari poſſint cum aliquâ Curvâ propoſitâ, aut cum ſuis Areis applicatis datæ Lineæ, idque per finitam Æquationem*, 185
Problema XII. *Determinare Curvarum Longitudinem*, 191

OPUSCULUM III.

De Quadraturâ Curvarum.

Introductio, 203
Tractatus de Quadraturâ Curvarum, 208

OPUSCULUM IV.

Enumeratio Linearum tertii ordinis, 247

OPUSCULUM V.

Methodus Differentialis, 273

OPUSCULUM VI.

Solutio duorum Problematum à *Johanne* BERNOULLIO propoſitorum, 286
De Ratione Temporis, quo Grave labitur per Rectam data duo Puncta conjungentem ad Tempus breviſſimum, quo vi Gravitatis tranſit ab horum uno ad alterum per arcum Cycloidis, 291

OPUSCULUM VII.

Problematis cujuſdam ſolutio, 293

OPUS-

OPUSCULUM VIII.

Excerptum Epiſtolæ NEWTONI ad COLLINSIUM, 297

OPUSCULUM IX.

Artic. I. *Exerptum Epiſtolæ* OLDEMBURGII ad SLUSIUM *in quo continetur pars Epiſtolæ* NEWTONI, 299
Artic. II. *Excerptum ex Epiſtolâ* LEIBNITII *ad* OLDEMBURGIUM, 300
Artic. III. *Excerptum ex Epiſtolâ* OLDEMBURGII *ad* LEIBNITIUM, *quâ ſuperiori reſpondetur*, 301
Artic. IV. *Excerptum ex Epiſtolâ* OLDEMBURGII *ad* LEIBNITIUM, 302
Artic. V. *Excerptum ex Epiſtolâ* LEIBNITII *ad* OLDEMBURGIUM, 303
Artic. VI. *Excerptum ex Epiſtolâ* COLLINSII *ad* OLDEMBURGIUM, *quâ ſuperiori reſpondetur*, 304

OPUSCULUM X.

Epiſtola Prior NEWTONI ad OLDEMBURGIUM, 307

OPUSCULUM XI.

Epiſtola Poſterior NEWTONI ad OLDEMBURGIUM,
Artic. I. *Excerptum ex Epiſtolâ* LEIBNITII *ad* OLDEMBURGIUM, 325
Artic. II. *Excerptum ex Epiſtolâ* TSCHURNAUSII *ad* OLDEMBURGIUM, 327
Artic. III. *Epiſtolâ* NEWTONI *ad* OLDEMBURGIUM, 328

OPUSCULUM XII.

Fragmentum Epiſtolæ NEWTONI ad COLLINSIUM, 358

OPUSCUCUM XIII.

Excerptum ex duabus Epiſtolis NEWTONI ad WALLISIUM, 361

OPUSCULUM XIV.

Epiſtola NEWTONI ad CHAMBERLAYNUM,
Artic. I. *Excerptum ex Epiſtolâ* LEIBNITII *ad* CHAMBERLAYNUM, 373
Artic. II. *Epiſtolâ* NEWTONI *ad* CHAMBERLAYNUM, 375

OPUSCUCUM XV.

Epiſtola NEWTONI ad Abbatem CONTI,
Artic. I. *Pars Epiſtolæ* LEIBNITII *ad Abbatem* CONTI, 379
Artic. II. *Epiſtola* NEWTONI *ad Abbatem* CONTI, 383

OPUSCULUM XVI.

Notæ NEWTONI in Epiſtolam LEIBNITII ad Abbatem CONTI,
Artic. I. *Epiſtola* LEIBNITII *ad Abbatem* CONTI, 391
Artic. II. *Animadverſiones* NEWTONI *in ſuperiorem* LEIBNITII *Epiſtolam*, 401

OPUS-

Digitized by Google

OPUSCULUM I.

ISAACI NEWTONI
ANALYSIS
PER ÆQUATIONES NUMERO
TERMINORUM INFINITAS.

Edita LONDINI 1711.

Digitized by Google

DE
ANALYSI
PER ÆQUATIONES NUMERO
TERMINORUM INFINITAS.

Methodum generalem, quam de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem menſuranda, olim excogitaveram, in ſequentibus breviter explicatam potius quam accuratè demonſtratam habes.

BASI AB (*Fig.* 1.) Curvæ alicujus AD, ſit Applicata BD perpendicularis: Et vocetur $AB=x$, $BD=y$, & ſint a, b, c, &c. Quantitates datæ, & m, n, Numeri Integri. Deinde, TAB. I.

Curvarum Simplicium Quadratura.

REGULA I.

Si $ax^{\frac{m}{n}}=y$; *Erit* $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}=$ *Areæ* ABD.

Digitized by Google

Res Exemplo patebit.

1. Si $x^2(=1x^{\frac{2}{1}})=y$, hoc eſt, $a=1=n$ & $m=2$; Erit $\frac{1}{3}x^3=$ABD.

2. Si $4\sqrt{x}(=4x^{\frac{1}{2}})=y$; Erit $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}(=\frac{8}{3}\sqrt[2]{x^3})=$ABD.

3. Si $\sqrt[3]{x^5}(=x^{\frac{5}{3}})=y$; Erit $\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}(=\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8})=$ABD.

4. Si $\frac{1}{x^2}(=x^{-2})=y$, id eſt, ſi $a=1=n$, & $m=-2$;
Erit $(-\frac{1}{1}x^{-\frac{1}{1}}=)\,-x^{-1}(=-\frac{1}{x})=\alpha$BD, infinitè verſùs α protenſæ (*Fig.* 2.), quam Calculus ponit negativam, propterea quod jacet ex altera parte Lineæ BD.

TAB. I.

5. Si $\frac{1}{\sqrt{x^3}}(=x^{-\frac{3}{2}})=y$; Erit $(-\frac{2}{1}x^{-\frac{1}{2}}=)\,\frac{2}{-\sqrt{x}}=BD\alpha$.

6. Si $\frac{1}{x}(=x^{-1})=y$; Erit $\frac{1}{0}x^{\frac{0}{1}}=\frac{1}{0}x^0=\frac{1}{0}\times 1=\frac{1}{0}=$ Infinitæ, qualis eſt Area Hyperbolæ ex utraque parte Lineæ BD.

Compoſitarum Curvarum Quadratura ex Simplicibus.

REGULA II.

Si valor ipſius y *ex pluribus iſtiuſmodi Terminis componitur, Area etiam componetur ex Areis quæ à ſingulis Terminis emanant.*

EXEMPLA PRIMA.

Si $x^2+x^{\frac{3}{2}}=y$; Erit $\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$ABD.

Etenim (*Fig.* 3.) ſi ſemper ſit $x^2=$BF, & $x^{\frac{3}{2}}=$FD, erit, ex præcedente Regula, $\frac{1}{3}x^3=$ ſuperficiei AFB deſcriptæ per Lineam BF, & $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$ AFD deſcriptæ per DF; Quare $\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$ toti ABD.

Sic ſi $x^2-x^{\frac{3}{2}}=y$; Erit $\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$ABD.

Et ſi $3x-2x^2+x^3-5x^4=y$; Erit $\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4-x^5=$ABD.

EXEM-

Exempla Secunda.

Si $x^{-2} + x^{-\frac{3}{2}} = y$; Erit (*Fig.* 6.) $-x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}} = \alpha BD$. TAB. I.

Vel ſi $x^{-2} - x^{-\frac{3}{2}} = y$; Erit $-x^{-1} + 2x^{-\frac{1}{2}} = \alpha BD$.

Quarum ſigna ſi mutaveris, habebis Affirmativum valorem ($x^{-1} + 2x^{-\frac{1}{2}}$ vel, $x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}}$) ſuperficiei αBD, modò tota cadat ſupra baſim ABα.

Sin aliqua pars cadat infra (quod fit cùm Curva decuſſat ſuam Baſin inter B & α, ut hìc (*Fig.* 4.) vides in δ,) iſtâ parte à parte ſuperiori ſubductâ, habebis valorem Differentiæ: Earum verò Summam ſi cupis, quære utramque Superficiem ſeorſim, & adde. Quod idem in reliquis hujus Regulæ exemplis notandum volo.

Exempla Tertia.

Si $x^2 + x^{-2} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 - x^{-1} =$ Superficiei deſcriptæ: Sed hìc notandum eſt, quòd dictæ Superficiei partes ſic inventæ jacent ex diverſo latere Lineæ BD.

Nempe, (*Fig.* 5.) poſito $x^2 = BF$, & $x^{-2} = FD$; Erit $\frac{1}{3}x^3 = ABF$ Superficiei per BF deſcriptæ, & $-x^{-1} = DF\alpha$ Superficiei deſcriptæ per DF.

Et hoc ſemper accidit cum Indices ($\frac{m+n}{n}$) rationum Baſis x in valore Superficiei quæſitæ, ſint variis ſignis affecti. In hujuſmodi Caſibus, pars aliqua BD$\delta\beta$ Superficiei media (quæ ſola dari poterit, cum Superficies ſit utrinque infinita) ſic invenitur.

Subtrahe Superficiem ad minorem Baſin Aβ pertinentem, à Superficie ad majorem Baſin AB pertinente, & habebis βBDδ Superficiem differentiæ Baſium inſiſtentem. Sic in hoc Exemplo. (*Vide Fig. præcedentem.*)

Si AB $= 2$, & A$\beta = 1$; Erit $\beta BD\delta = \frac{17}{6}$:

Etenim Superficies ad AB pertinens (ABF $-$ DFα), erit $\frac{8}{3} - \frac{1}{2}$ ſive $\frac{13}{6}$; & ſuperficies ad Aβ pertinens (A$\phi\beta - \delta\phi\alpha$)

erit $\frac{1}{3} - 1$, ſive $-\frac{2}{3}$: & earum differentia (ABF — DF — $A\Phi\beta + \delta\Phi\alpha = \beta BD\delta$) erit $\frac{13}{6} + \frac{2}{3}$ ſive $\frac{17}{6}$.

Eodem modo, ſi $A\beta = 1$, $AB = x$; Erit $\beta BD\delta = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^3 - x^{-1}$.

Sic ſi $2x^3 - 3x^5 - \frac{2}{3}x^{-4} + x^{-\frac{3}{5}} = y$, & $A\beta = 1$;

Erit $\beta BD\delta = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{9}x^{-3} + \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} - \frac{49}{18}$.

Denique notari poterit, quod ſi quantitas x^{-1} in valore ipſius y reperiatur, iſte Terminus (cum Hyperbolicam ſuperficiem generat) ſeorſim à reliquis conſiderandus eſt.

TAB. I. Ut ſi (*Fig.6.*) $x^2 + x^{-3} + x^{-1} = y$; Sit $x^{-1} = BF$, & $x^2 + x^{-3} = FD$, ac $A\beta = 1$; Et erit $\delta\Phi FD = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^{-2}$, utpote quæ ex Terminis $x^2 + x^{-3}$ generatur.

Quare, ſi reliqua Superficies $\beta\Phi FB$, quæ Hyperbolica eſt, ex Calculo aliquo ſit data, dabitur tota $\beta BD\delta$.

Aliarum omnium Quadratura.

REGULA III.

Sin valor ipſius y, *vel aliquis ejus Terminus ſit præcedentibus magis compoſitus, in Terminos Simpliciores reducendus eſt; operando in Literis ad eundem modum quo Arithmetici in Numeris Decimalibus dividunt, Radices extrahunt, vel affectas Æquationes ſolvunt; & ex iſtis Terminis quæſitam Curvæ Superficiem, per præcedentes Regulas deinceps elicies.*

Exempla Dividendo.

TAB. II. Sit $\frac{aa}{b+x} = y$; Curvâ nempe exiſtente Hyperbolâ (*Vid. Fig.* 11.)

Jam

Jam ut Æquatio iſta à Denominatore ſuo liberetur, Diviſionem ſic inſtituo.

$$b+x)\,aa+0\,\left(\frac{aa}{b}-\frac{aax}{b^2}+\frac{aax^2}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}\right. \text{ \&c.}$$

$$aa+\frac{aax}{b}$$

$$0-\frac{aax}{b}+0$$

$$-\frac{aax}{b}-\frac{aax^2}{b^2}$$

$$0+\frac{aax^2}{b^2}+0$$

$$+\frac{aax^2}{b^2}+\frac{aax^3}{b^3}$$

$$0-\frac{aax^3}{b^3}+0$$

$$-\frac{aax^3}{b^3}-\frac{aax^4}{b^4}$$

$$0+\frac{aax^4}{b^4}$$

&c.

Et ſic vice hujus $y=\frac{aa}{b+x}$, nova prodit $y=\frac{a^2}{b}-\frac{a^2x}{b^2}+\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{a^2x^3}{b^4}$, &c. ſerie iſtac infinitè continuatá ; Adeoque (per Regulam Secundam) Area quæſita ABDC æqualis erit ipſi $\frac{a^2x}{b}-\frac{a^2x^2}{2b^2}+\frac{a^2x^3}{3b^3}-\frac{a^2x^4}{4b^4}$ &c. infinitæ etiam ſeriei, cujus tamen Termini pauci initiales ſunt in uſum quemvis ſatis exacti, ſi modo x ſit aliquoties minor quam b.

Eodem modo, ſi ſit $\frac{1}{1+xx}=y$, Dividendo prodibit $y=1-x^2+x^4-x^6+x^8$ &c. Unde (per Regulam Secundam) erit $ABDC=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9$ &c.

Vel

Vel ſi Terminus xx ponatur in diviſore primus, hoc modo $(xx+1)$, prodibit $x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8}$ &c. pro valore ipſius y; Unde (per Regulam Secundam) erit $BD\alpha = -x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-3} - \frac{1}{5}x^{-5} + \frac{1}{7}x^{-7}$ &c. Priori modo procede cum x eſt ſatis parva, poſteriori cum ſatis magna ſupponitur.

Denique ſi $\dfrac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}} - 3x} = y$; Dividendo prodit $2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 7x^{\frac{3}{2}} - 13x^2 + 34x^{\frac{5}{2}}$ &c. unde erit $ABDC = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^2 + \frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{13}{3}x^3$ &c.

Exempla Radicem extrahendo.

Si ſit $\sqrt{aa+xx} = y$, Radicem ſic extraho,

$$aa + xx \left(a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \right. \text{ \&c.}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{aa} \\
0 + xx \\
\qquad \underline{xx + \frac{x^4}{4a^2}} \\
\qquad 0 - \frac{x^4}{4a^2} \\
\qquad\qquad \underline{- \frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6}} \\
\qquad\qquad 0 \quad + \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6} \\
\qquad\qquad\qquad \underline{+ \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{16a^6} - \frac{x^{10}}{64a^8} + \frac{x^{12}}{256a^{10}}} \\
\qquad\qquad\qquad 0 - \frac{5x^8}{64a^6} + \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{\&c.}
\end{array}$$

Unde, pro æquatione $\sqrt{aa+xx} = y$, nova producitur; $y = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$, &c. Et (per Reg. 2.) Area quæſita (*Fig.* 7.) $ABDC$ erit $= ax + \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} + \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ &c. Et hæc eſt Quadratura Hyperbolæ.

TAB. I.

Eodem

Eodem modo, ſi ſit $\sqrt{aa - xx} = y$, ejus Radix erit.

$a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$, &c. Adeóque (*Fig.* 12.) Area TAB. II. quæſita ABDC erit æqualis $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$, &c. Et hæc eſt Quadratura Circuli.

Vel, ſi ponas $\sqrt{x - xx} = y$, erit Radix æqualis infinitæ ſeriei. $x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{9}{2}}$, &c. Et (*Fig.* 1.) TAB. I. Area quæſita ABD æqualis erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}$, &c., ſive $x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{28}x^3 - \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{704}x^5$, &c. Et hæc eſt Areæ Circuli Quadratura.

Si $\frac{\sqrt{1 + ax^2}}{\sqrt{1 - bx^2}} = y$, (Cujus Quadratura dat Longitudinem curvæ ellipticæ;) Extrahendo Radicem utramque prodit

$$\frac{1 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{8}a^2x^4 + \frac{1}{16}a^3x^6 - \frac{5}{128}a^4x^8}{1 - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{8}b^2x^4 - \frac{1}{16}b^3x^6 - \frac{5}{128}b^4x^8}, \text{ \&c.}$$

Et dividendo, ſicut fit in Fractionibus Decimalibus, habes

$$\begin{array}{lllll}
1 + \frac{1}{2}bx^2 & + \frac{3}{8}b^2x^4 & + \frac{5}{16}b^3x^6 & + \frac{35}{128}b^4x^8, \text{ \&c.} \\
\quad + \frac{1}{2}a & + \frac{1}{4}ab & + \frac{3}{16}ab^2 & + \frac{5}{32}ab^3 \\
 & - \frac{1}{8}a^2 & - \frac{1}{16}a^2b & - \frac{3}{64}a^2b^2 \\
 & & + \frac{1}{16}a^3 & + \frac{1}{32}a^3b \\
 & & & - \frac{5}{128}a^4
\end{array}$$

Adeóque Aream quæſitam

$$\begin{array}{lll}
x + \frac{1}{6}bx^3 & + \frac{3}{40}b^2x^5, \text{ \&c.} \\
\quad + \frac{1}{6}a & + \frac{1}{20}ab \\
 & - \frac{1}{40}a^2
\end{array}$$

Sed obſervandum eſt, quòd Operatio non rarò abbreviatur per debitam Æquationis præparationem, ut in allato Exemplo $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}}=y$ Si utramque partem Fractionis per $\sqrt{1-bxx}$ multiplices prodibit $\frac{\sqrt{1+ax^2-abx^4}}{1-bx^2}=y$, & reliquum opus perficitur extrahendo Radicem Numeratoris tantùm, & dividendo per Denominatorem.

Ex hiſce, credo, ſatis patebit modus reducendi quemlibet valorem ipſius y (quibuſcumque Radicibus vel Denominatoribus ſit perplexus, ut hìc videre eſt;

$$x^3+\frac{\sqrt{x-\sqrt{1-xx}}}{\sqrt[3]{ax^2+x^3}}-\frac{\sqrt[5]{x^3+2x^5-x^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[3]{x+x^2}-\sqrt[2]{2x-x^{\frac{2}{3}}}}=y)$$

in ſeries infinitas ſimplicium Terminorum, ex quibus, per Regulam Secundam, quæſita Superficies cognoſcetur.

Exempla per Reſolutionem Æquationum.

NUMERALIS ÆQUATIONUM AFFECTARUM RESOLUTIO.

Quia tota difficultas in Reſolutione latet, modùm quo ego utor in Æquatione Numerali primùm illuſtrabo.

Sit $y^3-2y-5=0$, reſolvenda: Et ſit 2, numerus qui minus quam decimâ ſui parte differt à Radice quæſitâ. Tum pono $2+p=y$, & ſubſtituo hunc ipſi valorem in Æquationem, & inde nova prodit $p^3+6p^2+10p-1=0$, cujus Radix p exquirenda eſt, ut Quotienti addatur: Nempe (neglectis p^3+6p^2 ob parvitatem) $10p-1=0$, ſive $p=0,1$, prope veritatem eſt; itaque ſcribo $0,1$ in Quotiente, & ſuppono $0,1+q=p$, & hunc ejus valorem, ut prius ſubſtituo, unde prodit $q^3+6,3q^2+11,23q+0,061=0$.

Et cùm $11,23q+0,061=0$ veritati prope accedat, ſive fere ſit q æqualis $-0,0054$ (dividendo nempe donec tot eliciantur Figuræ quot locis primæ Figuræ hujus & principalis Quotientis excluſive diſtant) ſcribo $-0,0054$ in inferiori parte Quotientis, cùm negativa ſit.

Et ſupponens $-0,0054+r=q$, hunc ut prius ſubſtituo, & operationem ſic produco quo uſque placuerit. Verùm ſi ad bis tot

Tab. I. *pag.* 10. *Tom. I.*

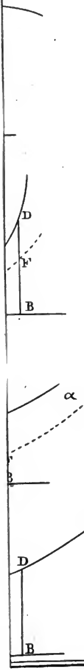


Fig. 2.

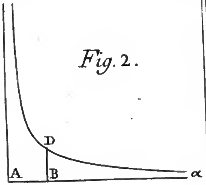


Fig. 4.

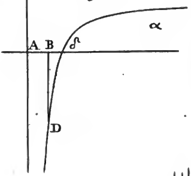
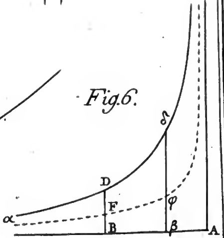


Fig. 6.



Digitized by Google

Digitized by Google

figuras tantùm quot in Quotiente jam reperiuntur unâ demptâ, operam continuare cupiam, pro q ſubſtituo $-0,0054+r$ in hanc $6,3q^2$ $+11,23q+0,061$, ſcilicet primo ejus Termino (q^3) propter exilitatem.

$y^3-2y-5=0$		$+2,10000000$
		$-0,00544853$
		$+2,09455147=y$
$2+p=y$	$+y^3$	$+8+12p+6p^2+p^3$
	$-2y$	$-4-2p$
	-5	-5
	Summa	$-1+10p+6p^2+p^3$
$0,1+q=p$	$+p^3$	$+0,001+0,03q+0,3q^2+q^3$
	$+6p^2$	$+0,06+1,2+6,0$
	$+10p$	$+1,\quad +10,$
	-1	$-1,$
	Summa	$+0,061+11,23q+6,3q^2+q^3$
$-0,0054+r=q$	$+6,3q^2$	$+0,000183708-0,06804r+6,3r^2$
	$+11,23q$	$-0,060642\quad +11,23$
	$+0,061$	$+0,061$
	Summa	$+0,000541708+11,16196r+6,3r^2$
$-0,00004853+s=r$		

ſuam neglecto, & prodit $6,3r^2+11,16196r+0,000541708=0$ fere, ſive (rejecto $6,3r^2$) $r=\dfrac{-0,000541708}{11,16196}=-0,00004853$ fere, quam ſcribo in negativa parte Quotientis. Denique negativam partem Quotientis ab Affirmativa ſubducens habeo 2,09455147 Quotientem quæſitam.

Æquationes plurium dimenſionum nihilo ſecius reſolvuntur, & operam ſub fine, ut hìc factum fuit, levabis, ſi primos ejus Terminos gradatim omiſeris.

Præterea notandum eſt quòd in hoc exemplo, ſi dubitarem an $0,1=p$ veritati ſatis accederet, pro $10p-1=0$, finxiſſem $6p^2+10p-1=0$, & ejus Radicis primam Figuram in Quotiente ſcripſiſſem; & ſecundam vel tertiam Quotientis Figuram ſic explorare convenit, ubi in Æquatione iſta ultimò reſultante quadratum coefficientis penultimi Termini, non ſit decies majus quam factus ex ultimo Termino ducto in coefficientem Termini antepenultimi.

Digitized by Google

Imo laborem plerumque minues, præſertim in Æquationibus plurimarum dimenſionum, ſi Figuras omnes Quotienti addendas dicto modo (hoc eſt extrahendo minorem Radicum, ex tribus ultimis Terminis Æquationis noviſſime reſultantis) exquiras: Iſto enim modo Figuras duplo plures qualibet vice Quotienti lucraberis.

Hæc Methodus reſolvendi Æquationes pervulgata an ſit neſcio, certe mihi videtur præ reliquis ſimplex, & uſui accommodata. Demonſtratio ejus ex ipſo modo operandi patet, unde cùm opus ſit, in memoriam facile revocatur.

Æquationes in quibus vel aliqui vel nulli Termini deſint, eadem fere facilitate tractantur; & Æquatio ſemper relinquitur, cujus Radix unà cum acquiſita Quotiente adæquat Radicem Æquationis primo propoſitæ. Unde Examinatio Operis hìc æque poterit inſtitui ac in reliqua Arithmetica, auferendo nempe Quotientem à Radice primæ Æquationis (ſicut Analyſtis notum eſt) ut Æquatio ultima vel Termini ejus duo treſve ultimi producantur inde. Quicquid laboris hìc eſt, iſtud in Operatione ſubſtituendi quantitates unas pro aliis reperietur: Id quod varie perficias, at ſequentem modum maxime expeditum puto, præſertim ubi Numeri coefficientes conſtant ex pluribus Figuris.

Sit $p+3$ ſubſtituenda pro y in hanc $y^4-4y^3+5y^2-12y+17=0$. Et cùm iſta poſſit reſolvi in hanc formam $\overline{\overline{\overline{y-4}\times y+5}\times y-12}\times y+17=0$. Æquatio nova ſic generabitur $\overline{p-1}\times\overline{p+3}=p^2+2p-3$. & p^2+2p+2 in $p+3=p^3+5p^2+8p+6$. & p^3+5p^2+8p-6 in $p+3=p^4+8p^3+23p^2+18p-18$. & $p^4+8p^3+23p^2+18p-1=0$, quæ quærebatur.

LITERALIS ÆQUATIONUM AFFECTARUM RESOLUTIO.

His in numeris ſic oſtenſis: Sit Æquatio literalis $y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$, reſolvenda.

Primùm

Primùm inquiro valorem ipſius y cum x ſit nulla, hoc eſt, elicio Radicem hujus Æquationis $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$, & invenio eſſe $+a$. Itaque ſcribo $+a$ in Quotiente, & ſupponens $+a+p=y$, ſubſtituo pro y valorem ejus, & Terminos inde reſultantes ($p^3 + 3ap^2 + 4a^2p$, &c.) margini appono; Ex quibus aſſumo $+4a^2p + a^2x$ Terminos utique ubi p & x ſeorſim ſunt minimarum dimenſionum, & eos nihilo fere æquales eſſe ſuppono, ſive $p = -\frac{1}{4}x$ fere, vel $p = -\frac{1}{4}x + q$. Et ſcribens $-\frac{1}{4}x$ in Quotiente, ſubſtituo $-\frac{1}{4}x+q$ pro p; Et Terminos inde reſultantes iterum in margine ſcribo, ut vides in annexo ſchemate, & inde aſſumo Quantitates $+4a^2q - \frac{1}{16}ax^2$, in quibus utique q & x ſeorſim ſunt minimarum dimenſionum, & fingo $q = \frac{xx}{64a}$ fere, ſive $q = +\frac{xx}{64a} + r$; & adnectens $+\frac{xx}{64a}$ Quotienti, ſubſtituo $\frac{xx}{64a} + r$ pro q; & ſic procedo quo uſque placuerit.

$$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$$

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}, \text{ \&c.}$$

$+a+p=y$	$+y^3$	$+a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3$
	$+a^2y$	$+a^3 + a^2p$
	$+axy$	$+a^2x + axp$
	$-2a^3$	$-2a^3$
	$-x^3$	$-x^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	$+p^3$	$-\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{16}x^2q - \frac{3}{4}xq^2 + q^3$
	$+3ap^2$	$+\frac{3}{16}ax^2 - \frac{3}{2}axq + 3aq^2$
	$+4a^2p$	$-a^2x \quad +4a^2q$
	$+axp$	$-\frac{1}{4}ax^2 \quad +axq$
	$+a^2x$	$+a^2x$
	$-x^3$	$-x^3$
$+\frac{x^2}{64a}+r=q$	$+3aq^2$	$+\frac{3x^4}{4096a} + \frac{3}{32}x^2r + 3ar^2$
	$+4a^2q$	$+\frac{1}{16}ax^2 + 4a^2r$
	$-\frac{1}{2}axq$	$-\frac{1}{128}x^3 - \frac{1}{2}axr$
	$+\frac{3}{16}x^2q$	$+\frac{3x^4}{1024a} + \frac{3}{16}x^2r$
	$-\frac{1}{16}ax^2$	$-\frac{1}{16}ax^2$
	$-\frac{65}{64}x^3$	$-\frac{65}{64}x^3$

$$+4a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{9}{32}x^2) + \frac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a}(+\frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$$

Sin duplo tantùm plures Quotienti Terminos, uno dempto, jungendos adhuc vellem: Primo Termino (q^3) Æquationis noviſſime reſultantis miſſo, & iſtâ etiam parte ($-\frac{3}{4}q^2$) ſecundi, ubi x eſt tot dimenſionum quot in penultimo Quotientis; In reliquos Terminos ($3aq^2 + 4a^2q$, *&c.*) margini adſcriptos ut vides, ſubſtituo $\frac{x^2}{64a}+r$ pro q; & ex ultimis duobus Terminis ($\frac{15x^4}{4096a} - \frac{131}{128}x^3$

+

$+\frac{9}{32}x^2r-\frac{1}{2}axr+4a^2r$) Æquationis inde reſultantis, facta diviſione, $4a^2-\frac{1}{2}ax+\frac{9}{32}x^2$) $+\frac{131}{128}x^3-\frac{15x^4}{4096a}$ elicio ($+\frac{131x^3}{512a^2}$ $+\frac{509x^4}{16384a^3}$, Quotienti adnectendos.

Denique Quotiens iſta ($a-\frac{x}{4}+\frac{xx}{64a}$, &c.) per Regulam ſecundam, dabit $ax-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{192a}+\frac{131x^4}{2048a^2}+\frac{509x^5}{81920a^3}$, &c. pro Area quæſita, quæ ad veritatem tanto magis accedit, quanto x ſit minor.

Alius modus eaſdem Reſolvendi.

Sin valor Areæ tanto magis ad veritatem accedere debet quanto x ſit major; Exemplum eſto $y^3+axy+x^2y-a^3-2x^3=0$. Itaque hanc reſoluturus excerpo Terminos $y^3+x^2y-2x^3$ in quibus x & y vel ſeorſim, vel ſimul multiplicatæ, ſunt & plurimarum, & æqualium ubique dimenſionum; & ex iis quaſi nihilo æqualibus Radicem elicio. Hanc invenio eſſe x, & in Quotiente ſcribo. Vel, quod eodem recidit, ex y^3+y-2 (unitate pro x ſubſtituta) Radicem extraho, quæ hic prodit 1, & eam per x multiplico, & factum (x) in Quotiente ſcribo. Denique pono $x+p=y$, & ſic procedo ut in priori Exemplo, donec habeam Quotientem $x-\frac{a}{4}+\frac{aa}{64x}+\frac{131a^3}{512x^2}+\frac{509a^4}{16384x^3}$, &c. Adeóque Aream $\frac{x^2}{2}-\frac{ax}{4}+\boxed{\frac{aa}{64x}}-\frac{131a^3}{512x}-\frac{509a^4}{32768x^2}$, de qua vide exempla tertia Regulæ ſecundæ. Lucis gratia dedi hoc exemplum in omnibus idem cum priori, modò x & a ſibi invicem ibi ſubſtituantur, ut non opus eſſet aliud Reſolutionis exemplum hìc adjungere.

Area autem ($\frac{xx}{2}-\frac{ax}{4}+\boxed{\frac{aa}{64x}}$, &c.) terminatur ad Curvam quæ juxta Aſymptoton aliquam in infinitum ſerpit; & Termini initiales ($x-\frac{1}{4}a$) valoris extracti de y, in Aſymptoton iſtam ſemper terminantur; unde portionem Aſymptoti facilè invenies. Idem ſemper

notan-

notandum eſt cùm Area deſignatur Terminis plùs plúſque diviſis per x continuè, præterquamquod vice Aſymptoti rectæ quandoque habeatur Parabola conica, vel alia magis compoſita.

Sed hunc modum miſſum faciens, utpote particularem, quia non applicabilem Curvis in orbem ad inſtar Ellipſium flexis; de altero modo per exemplum $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, ſupra oſtenſo (ſcilicet quo dimenſiones ipſius x in Numeratoribus Quotientis perpetuo augeantur) annotabo ſequentia.

1. Si quando accidit quòd valor ipſius y, cum x nullum eſſe fingitur, ſit quantitas ſurda vel penitus ignota, licebit illam litera aliqua deſignare. Ut in exemplo, $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, ſi Radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3$ fuiſſet ſurda vel ignota, finxiſſem quamlibet (b) pro ea ponendam; & Reſolutionem ut ſequitur perfeciſſem. Scribens b in Quotiente, ſuppono $b + p = y$, & iſtum pro y ſubſtituo, ut vides; unde nova $p^3 + 3bp^2$, &c. reſultat, rejectis Terminis $b^3 + a^2b - 2a^3$, qui nihilo ſunt æquales, propterea quod b ſupponitur Radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$. Deinde Termini $3b^2p + a^2p + abx$ dant $-\frac{abx}{3b^2 + a^2}$ Quotienti apponendum, & $-\frac{abx}{3b^2 + a^2} + q$ ſubſtituendum pro p, &c.

$y^3 + aay$

$$y^3+aay+axy-2a^3-x^3=0. \text{ Sit } cc=3b^2+a^2.$$

$$y=b-\frac{abx}{c^2}+\frac{a^4bx^2}{c^6}+\frac{x^3}{c^2}+\frac{a^3b^3x^3}{c^8}-\frac{a^5bx^3}{c^8}+\frac{6a^5b^3x^3}{c^{10}}, \text{ \&c.}$$

$b+p=y$	$+y^3$	$+b^3+3b^2p+3bp^2+p^3$
	$+axy$	$+abx+axp$
	$+aay$	$+aab+aap$
	$-x^3$	$-x^3$
	$-2a^3$	$-2a^3$
$\frac{-abx}{cc}+q=p$	$+p^3$	$-\frac{a^3b^3x^3}{c^6}$, &c.
	$+3bp^2$	$+\frac{3a^2b^3x^2}{c^4}-\frac{6ab^2x}{c^2}q$, &c.
	$+axp$	$-\frac{a^2bx^2}{c^2}+axq$
	$+ccp$	$-abx+ccq$
	$-x^3$	$-x^3$
	$+abx$	$+abx$

$$c^2+ax-\frac{6ab^2x}{cc}\Big)\frac{a^4bx^2}{c^4}+x^3+\frac{a^3b^3x^3}{c^6}\Big(\frac{a^4bx^2}{c^6}+\frac{x^3}{c^2}+\frac{a^3b^3x^3}{c^8}, \text{ \&c.}$$

Completo opere, ſumo numerum aliquem pro a, & hanc $y^3+a^2y-2a^3=0$, ſicut de numerali Æquatione oſtenſum ſuprà, reſolvo; & Radicem ejus pro b ſubſtituo.

2. Si dictus valor ſit nihil, hoc eſt, ſi in Æquatione reſolvendâ nullus ſit Terminus, niſi qui per x vel y ſit multiplicatus, ut in hâc $y^3-axy+x^3=0$; tum Terminos $(-axy+x^3)$ ſeligo, in quibus x ſeorſim & y etiam ſeorſim, ſi fieri poteſt, aliàs per x multiplicata, ſit minimarum dimenſionum. Et illi dant $+\frac{xx}{a}$ pro primo Termino Quotientis, & $\frac{xx}{a}+p$ pro y ſubſtituendum. In hac $y^3-a^2y+axy-x^3=0$, licebit primum Terminum Quotientis vel ex $-a^2y-x^3$, vel ex y^3-a^2y elicere.

3. Si valor iſte ſit imaginarius, ut in hac $y^4+y^3-2y+6-x^2y^2-2x+x^2+x^4=0$, augeo vel imminuo quantitatem x donec dictus valor evadat realis.

TAB. II. Sic in annexo *ſchemate* (*Fig.* 8.), cum AC (x) nulla eſt, tum CD (y) eſt imaginaria.

Sin minuatur AC per datam AB, ut BC fiat x; tum poſito quòd BC (x) ſit nulla, CD (y) erit valore quadruplici (CE, CF, CG, vel CH) realis; quarum Radicum (CE, CF, CG, vel CH) quælibet poteſt eſſe primus Terminus Quotientis, prout ſuperficies BEDC, BFDC, BGDC, vel BHDC deſideratur. In aliis etiam caſibus, ſi quando hæſitas, te hoc modo extricabis.

Denique, ſi index poteſtatis ipſius x vel y ſit fractio, reduco ipſum ad integrum: ut in hoc exemplo $y^3 - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{3}} = 0$. Poſito $y^{\frac{1}{2}} = v$, & $x^{\frac{1}{3}} = z$, reſultabit $v^6 - z^3 v + z^4 = 0$, cujus Radix eſt $v = z + z^3$, &c. ſive (reſtituendo valores) $y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}} + x$, &c. & quadrando $y = x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}}$, &c.

Et hæc de areis Curvarum inveſtigandis dicta ſufficiant. Imo, cùm Problemata omnia de Curvarum Longitudine, de quantitate & ſuperficie Solidorum, déque Centro Gravitatis, poſſunt eò tandem reduci, ut quæratur quantitas Superficiei planæ lineâ curvâ terminatæ, non opus eſt quicquam de iis adjungere. In iſtis autem quo ego operor modo dicam breviſſime.

Applicatio prædictorum ad reliqua iſtiuſmodi Problemata.

TAB. II. Sit (*Fig.* 9.) ABD Curva quævis, & AHKB rectangulum, cujus latus AH vel BK eſt unitas. Et cogita rectam DBK uniformiter ab AH motam, areas ABD & AK deſcribere; & quòd BK (1) ſit momentum, quo AK (x), & BD (y) momentum, quo ABD gradatim augetur; & quòd ex momento BD perpetim dato, poſſis, per prædictas regulas, aream ABD ipſo deſcriptam inveſtigare, ſive cum areâ AK (x) momento 1 deſcriptâ conferre.

Jam, quâ ratione Superficies ABD ex momento ſuo perpetim dato, per præcedentes regulas elicitur, eâdem quælibet alia quantitas ex momento ſuo ſic dato elicietur. Exemplo res fiet clarior.

Longi-

Digitized by Google

Longitudines Curvarum invenire.

Sit (*Fig.* 10.) ADLE Circulus, cujus Arcus AD longitudo eſt indaganda. Ductâ tangente DHT, & completo indefinite parvo rectangulo HGBK, & poſito $AE = 1 = 2AC$. Erit, ut BK, ſive GH, momentum Baſis AB (x), ad HD momentum Arcûs AD :: BT : DT :: BD ($\sqrt{x-xx}$) : DC ($\frac{1}{2}$) :: 1 (BK) : $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ (DH). Adeóque $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ ſive $\frac{\sqrt{x-xx}}{2x-2xx}$ eſt momentum Arcûs AD. Quod reductum fit $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{32}x^{\frac{5}{2}} + \frac{35}{256}x^{\frac{7}{2}} + \frac{63}{512}x^{\frac{9}{2}}$, &c. Quare, per regulam ſecundam, longitudo Arcûs AD eſt $x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}} + \frac{35}{1152}x^{\frac{9}{2}} + \frac{63}{2816}x^{\frac{11}{2}}$, &c. ſive $x^{\frac{1}{2}}$ in $1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + \frac{5}{112}x^3 + \frac{35}{1152}x^4 + \frac{63}{2816}x^5$, &c. TAB. II.

Non ſecus ponendo CB eſſe x, & Radium CA eſſe 1, invenies Arcum LD eſſe $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c.

Sed notandum eſt, quòd unitas iſta, quæ pro momento ponitur, eſt Superficies cum de Solidis, & Linea cum de Superficiebus, & Punctum cum de Lineis (ut in hoc exemplo) agitur.

Nec vereor loqui de unitate in Punctis, ſive Lineis infinite parvis, ſiquidem proportiones ibi jam contemplantur Geometræ, dum utuntur methodis Indiviſibilium.

Ex his fiat conjectura de Superficiebus & quantitatibus Solidorum, ac de Centris Gravitatum.

Digitized by Google

Invenire prædictorum converſum.

Verùm ſi è contra ex areâ vel longitudine &c. Curvæ alicujus data longitudo Baſis AB deſideratur, ex Æquationibus per præcedentes regulas inventis extrahatur Radix de x.

Inventio Baſis ex Area data.

TAB. II. Ut ſi (*Fig.* 11.) ex areâ ABDC Hyperbolæ ($\frac{1}{1+x}=y$) datâ, cupiam baſim AB inveſtigare, areâ iſtâ z nominatâ, extraho Radicem hujus z (ABCD) $= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$, &c. neglectis illis Terminis, in quibus x eſt plurium dimenſionum quàm z in Quotiente deſideratur.

Ut, ſi vellem quòd z ad quinque tantùm dimenſiones in Quotiente aſcendat, negligo omnes $-\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8$, &c. & Radicem hujus tantùm $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - z = 0$ extraho.

$u = z$

$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$, &c.		
$z + p = x$	$+\frac{1}{5}x^5$	$+\frac{1}{5}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{4}x^4$	$-\frac{1}{4}z^4 - z^3p$, &c.
	$+\frac{1}{3}x^3$	$+\frac{1}{3}z^3 + z^2p + zp^2$, &c.
	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}z^2 - zp - \frac{1}{2}p^2$
	$+x$	$+z+p$
	$-z$	$-z$
$\frac{1}{2}z^2 + q = p$	$+zp^2$	$+\frac{1}{4}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{2}p^2$	$-\frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{2}z^2q$, &c.
	$-z^3p$	$-\frac{1}{2}z^5$, &c.
	$+z^2p$	$+\frac{1}{2}z^4 + z^2q$
	$-zp$	$-\frac{1}{2}z^3 - zq$
	$+p$	$+\frac{1}{2}z^2 + q$
	$+\frac{1}{5}z^5$	$+\frac{1}{5}z^5$
	$-\frac{1}{4}z^4$	$-\frac{1}{4}z^4$
	$+\frac{1}{3}z^3$	$+\frac{1}{3}z^3$
	$-\frac{1}{2}z^2$	$-\frac{1}{2}z^2$
$1 - z + \frac{1}{2}z^2)\ \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{20}z^5\ (\frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$		

Analyſin, ut vides, exhibui propter adnotanda duo ſequentia.

1. Quòd inter ſubſtituendum, iſtos Terminos ſemper omitto, quos nulli deinceps uſui fore prævideam. Cujus rei regula eſto, quòd poſt primum Terminum ex qualibet quantitate ſibi collaterali reſultantem, non addo plures Terminos dextrorſum, quam iſtius primi Termini index dimenſionis ab indice dimenſionis maximæ unitatibus diſtat. Ut in hoc exemplo, ubi maxima dimenſio eſt 5, omiſi omnes Terminos poſt z^5, poſt z^4 poſui unicum, & duos tantùm poſt z^3. Cùm Radix extrahenda (x) ſit parium ubique, vel imparium dimenſionum, hæc eſto regula; Quòd poſt primum Terminum ex qualibet quantitate ſibi collaterali reſultantem, non addo plures Terminos dextrorſum, quam iſtius primi Termini index dimenſionis ab indice dimenſionis maximæ binis unitatibus diſtat; vel ternis unitatibus, ſi indices dimenſionum ipſius x unitatibus ubique ternis à ſe invicem diſtant, & ſic de reliquis.

2. Cùm video p, q, vel r, &c. in Æquatione noviſſime reſultante eſſe unius tantùm dimenſionis, ejus valorem, hoc eſt, reliquos Terminos Quotienti addendos, per diviſionem quæro. Ut hìc vides factum.

Inventio Baſis ex data Longitudine Curvæ.

TAB. II. Si (*Fig.* 12.) ex dato arcu αD Sinus AB deſideratur; Æquationis $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c. ſupra inventæ, (poſito nempe AB $= x$, αD $= z$, & A$\alpha = 1$,) Radix extracta erit $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$, &c.

Et præterea, ſi Coſinum Aβ ex iſto arcu dato cupis, fac Aβ $(= \sqrt{1 - xx}) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}z^{10}$, &c.

De Serie progreſſionum continuanda.

Hic obiter notetur, quòd 5 vel 6 Terminis iſtarum Radicum cognitis, eas plerumque ex analogia obſervata poteris ad arbitrium producere. Sic

Sic hanc $x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$, &c. produces dividendo ultimum Terminum per hos ordine numeros 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

Et hanc $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7$, &c. per hos 2×3, 4×5, 6×7, 8×9, 10×11, &c.

Et hanc $x = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6$, &c. per hos 1×2, 3×4, 5×6, 7×8, 9×10, &c.

Et hanc $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c. multiplicando per hos $\frac{1\times1}{2\times3}$, $\frac{3\times3}{4\times5}$, $\frac{5\times5}{6\times7}$, $\frac{7\times7}{8\times9}$, &c. Et ſic in reliquis.

Applicatio prædictorum ad Curvas mechanicas.

Et hæc de curvis geometricis dicta ſufficiant. Quinetiam Curva etiamſi mechanica ſit, methodum tamen noſtram nequaquam reſpuit.

Exemplo ſit (*Fig.* 13.) Trochoides ADFG, cujus vertex, A, & axis AH, & AKH rota, quâ deſcribitur. Et quæratur Superficies ABD. Jam poſito $AB = x$, $BD = y$, ut ſupra, & $AH = 1$; primo quæro Longitudinem ipſius BD. Nempe ex natura Trochoidis eſt $KD =$ arcui AK. Quare tota $BD = BK +$ arc. AK. Sed eſt $BK\ (= \sqrt{x - xx}) = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$, &c. & (ex prædictis) arcus $AK = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Ergo tota $BD = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Et (per Reg. 2.) area $ABD = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}}$, &c. TAB. II.

Vel breviùs ſic: Cùm recta AK tangenti TD parallela ſit, erit AB ad BK ſicut momentum lineæ AB ad momentum lineæ BD, hoc eſt $x : \sqrt{x - xx}$

$\sqrt{x-xx} :: 1 : \frac{1}{x}\sqrt{x-xx} = x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Quare (per Reg. 2.) $BD = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{576}x^{\frac{9}{2}}$, &c. Et Superficies $ABD = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{3168}x^{\frac{11}{2}}$, &c.

Non diſſimili modo (poſito C centro Circuli, & $CB = x$.) obtinebis aream CBDF, &c.

Sit (*Fig.* 14.) area ABDV Quadratricis VDE (cujus vertex eſt V, & A centrum circuli interioris VK cui aptatur) invenienda. Ductâ qualibet AKD, demitto perpendiculares DB, DC, KG. Erítque $KG : AG :: AB(x) : BD(y)$, ſive $\frac{x \times AG}{KG} = y$. Verùm ex naturâ Quadratricis eſt $BA\,(=DC) =$ arcui VK, ſive $VK = x$. Quare poſito $AV = 1$, erit $GK = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$, &c., ex ſupra oſtenſis, & $GA = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$, &c.

$$\text{Adeòque } y \left(= \frac{x \times AG}{KG}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6}, \text{ \&c.}$$

ſive, diviſione factâ, $y = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6$, &c. & (per Reg. 2.) area $AVDB = x - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{225}x^5 - \frac{2}{6615}x^7$, &c.

Sic longitudo Quadratricis VD, licet calculo difficiliori, determinabilis eſt.

Nec quicquam hujuſmodi ſcio, ad quod hæc methodus, ídque variis modis, ſeſe non extendit. Imo tangentes ad curvas mechanicas (ſi quando id non aliàs fiat) hujus ope ducantur. Et quicquid vulgaris Analyſis per Æquationes ex finito Terminorum numero conſtantes

tantes, (quando id ſit poſſibile,) perficit, hæc per Æquationes infinitas ſemper perficiat: Ut nil dubitaverim nomen Analyſis etiam huic tribuere. Ratiocinia nempe in hac non minus certa ſunt quàm in illà, nec Æquationes minus exactæ; licèt omnes earum Terminos, nos homines & rationis finitæ nec deſignare neque ita concipere poſſimus, ut quantitates inde deſideratas exacte cognoſcamus: Sicut Radices ſurdæ finitarum Æquationum nec numeris nec quavis arte analyticâ ita poſſunt exhiberi ut alicujus quantitas à reliquis diſtincta exacte cognoſcatur.

Denique ad Analyticam meritò pertinere cenſeatur cujus beneficio Curvarum areæ & longitudines &c. (id modò fiat) exactè & geometricè determinentur. Sed iſta narrandi non eſt locus; reſpicienti duo, præ reliquis, demonſtranda occurrunt.

I.

Demonſtratio quadraturæ Curvarum ſimplicium in Regula prima.

Præparatio pro Regula prima demonſtranda.

Sit itaque (*Fig.* 15.) Curvæ alicujus ADδ Baſis AB $= x$, perpendiculariter applicata BD $= y$, & area ABD $= z$, ut priùs. Item ſit B$\beta = o$, BK $= v$, & rectangulum BβHK (ov) æquale ſpatio B$\beta\delta$D. TAB. II.

Eſt ergo A$\beta = x + o$, & A$\delta\beta = z + ov$. His præmiſſis, ex relatione inter x & z ad arbitrium aſſumptâ, quæro y iſto, quem ſequentem vides, modo.

Pro lubitu ſumatur $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = z$, ſive $\frac{4}{9} x^3 = zz$. Tum $x + o$ (Aβ) pro x, & $z + ov$ (A$\delta\beta$) pro z ſubſtitutis, prodibit $\frac{4}{9}$ in $x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3 =$ (ex natura Curvæ) $z^2 + 2zov + o^2v^2$. Et ſublatis ($\frac{4}{9} x^3$ & zz) æqualibus, reliquiſque per o diviſis, reſtat $\frac{4}{9}$ in $3x^2 + 3xo + o^2 = 2zv + ov^2$. Si jam ſupponamus B$\beta$ in

 infi-

infinitum diminui & evaneſcere, ſive o eſſe nihil, erunt v & y æquales, & Termini per o multiplicati evaneſcent, quare reſtabit $\frac{4}{9}\times 3xx = 2zv$, ſive $\frac{2}{3}xx\,(=zy) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y$, ſive $x^{\frac{1}{2}}\ (= \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}) = y$.

Quare è contra, ſi $x^{\frac{1}{2}} = y$, erit $\frac{2}{3}\ x^{\frac{3}{2}} = z$.

Demonſtratio.

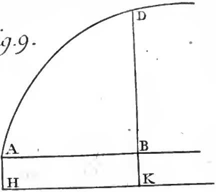
Vel generaliter, ſi $\frac{n}{m+n}\times ax^{\frac{m+n}{n}} = z$; ſive ponendo $\frac{na}{m+n} = c$, & $m+n=p$, ſi $cx^{\frac{p}{n}} = z$, ſive $c^n\ x^p = z^n$: tum $x+o$ pro x, & $z+ov$ (ſive, quod perinde eſt, $z+oy$) pro z, ſubſtitutis, prodit c^n in $x^p + pox^{p-1}$, &c. $= z^n + noyz^{n-1}$, &c. reliquis nempe Terminis, qui tandem evaneſcerent, omiſſis. Jam ſublatis $c^n\ x^p$ & z^n æqualibus, reliquiſque per o diviſis, reſtat $c^n\ px^{p-1} = nyz^{n-1}\ (= \frac{nyz^n}{z} = \frac{nyc^nx^p}{cx^{\frac{p}{n}}}$ ſive, dividendo per $c^n\ x^p$, erit $px^{-1} = \frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}}$ ſive $pcx^{\frac{p-n}{n}} = ny$; vel reſtituendo $\frac{na}{m+n}$ pro c, & $m+n$ pro p, hoc eſt, m pro $p-n$, & na pro pc, fiet $ax^{\frac{m}{n}} = y$. Quare è contra ſi $ax^{\frac{m}{n}} = y$, erit $\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}} = z$. Q. E. D.

Inventio Curvarum quæ poſſunt quadrari.

Hinc in tranſitu notetur modus quo Curvæ tot quot placuerit, quarum areæ ſunt cognitæ, poſſunt inveniri; ſumendo nempe quamlibet

II. pag. 26. Tom. I.

Fig. 9.



o.

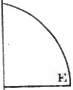


Fig. 11.

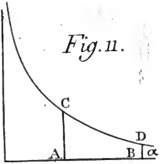


Fig. 13.

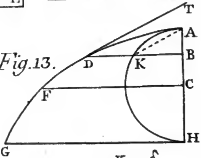
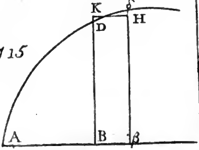


Fig 15



libet æquationem pro relatione inter aream z & baſin x ut inde quæratur applicata y. Ut ſi ſupponas $\sqrt{aa+xx}=z$, ex calculo invenies $\frac{x}{\sqrt{aa+xx}}=y$. Et ſic de reliquis.

II.

Demonſtratio reſolutionis Æquationum affectarum.

Alterum demonſtrandum eſt literalis Æquationum affectarum reſolutio. Nempe, quòd Quotiens, cùm x ſit ſatis parva, quo magis producitur eo magis ad veritatem accedit, ut defectus (p, q, vel r, &c.) quo diſtat ab exacto valore ipſius y, tandem evadat minor quavis data quantitate; & in infinitum producta ſit ipſi y æqualis. Quod ſic patebit.

1. Quoniam ex ultimo Termino Æquationum, quarum p, q, r, &c. ſunt Radices, quantitas illa, in qua x eſt minimæ dimenſionis (hoc eſt, pluſquam dimidium iſtius ultimi Termini, ſi ſupponis x ſatis parvam eſſe) in qualibet operatione perpetuo tollitur: iſte ultimus Terminus (per 1. 10. *Elem.*) tandem evadet minor quavis data quantitate; & prorſus evaneſcet ſi opus infinite continuatur.

Nempe ſi $x=\frac{1}{2}$, erit x dimidium omnium $x+x^2+x^3+x^4$, &c., & x^2 dimidium omnium $x^2+x^3+x^4+x^5$, &c. Itaque ſi x ſuperet $\frac{1}{2}$, erit x pluſquam dimidium omnium $x+x^2+x^3$, &c., & x^2 pluſquam dimidium omnium $x^2+x^3+x^4$, &c. Sic ſi $\frac{x}{b}$ major ſit $\frac{1}{2}$, erit x pluſquam dimidium omnium $x+\frac{x^2}{b}+\frac{x^3}{bb}$, &c. Et ſic de reliquis. Et numeros coefficientes quod attinet, illi plerumque deſcreſcunt perpetuo, vel ſi quando increſcant, tantùm opus eſt ut x aliquoties adhuc minor ſupponatur.

2. Si ultimus Terminus alicujus Æquationis continuo diminuatur donec tandem evaneſcat, una ex ejus Radicibus etiam diminuetur donec cum ultimo Termino ſimul evaneſcat.

3. Quare quantitatum p, q, r, &c. unus valor continuo decreſ-

D 2 cit

Digitized by Google

cit donec tandem, cùm opus in infinitum producitur, penitus evaneſcat.

4. Sed valores iſtarum p, q, vel r, &c. unà cum Quotiente eatenus extractà adæquant Radices Æquationis propoſitæ (Sic in reſolutione Æquationis $y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, ſupra oſtenſâ, percipies $y = a + p = a - \frac{1}{4}x + q = a - \frac{1}{4}x + \frac{xx}{64a} + r$, &c.) Unde ſatis liquet propoſitum, quòd Quotiens infinite productus ſit unus ex valoribus de y.

Idem patebit ſubſtituendo Quotientem pro y in Æquationem propoſitam. Videbis enim Terminos illos ſeſe perpetuo deſtruere, in quibus x eſt minimarum dimenſionum.

OPUS-

Digitized by Google

OPUSCULUM II.

METHODUS

FLUXIONUM ET SERIERUM INFINITARUM,

Cum ejuſdem

APPLICATIONE AD CURVARUM GEOMETRIAM;

AUCTORE

ISAACO NEWTONO,

Equite & Regiæ Societatis Præſide,

Anglicè edita

à JOHANNE COLSONO M. A. & R. S. S. &c.

LONDINI An. 1736.

D 3

Digitized by Google

Digitized by Google

METHODUS
FLUXIONUM ET SERIERUM
INFINITARUM.

INTRODUCTIO.

De Reſolutione Æquationum per Series infinitas.

CUM animadvertiſſem, quòd multi ex recentioribus Geometris, neglectâ Veterum ſyntheticâ methodo, præcipuam dederant operam colendæ arti analyticæ, quâ freti perficere valuerunt tot, & tam ardua, ut omnes geometricas ſpeculationes pertractaſſe & exhauſiſſe videantur, præter Curvarum quadraturas, & nonnulla alia hujus generis nondum ſatis perſpecta & ponderata: non extra rem putavi libellum hunc in Tyronum Geometrarum gratiam conſcribere, in quo fines Analyſeos proferre, & Curvarum doctrinam augere conatus ſum.

Operatio-

Digitized by Google

Operationes, quæ *ſpeciebus*, & eæ quæ vulgaribus ***numeris*** perficiuntur, perſimiles ſunt, & ſolùm differre videntur characteribus quibus exponuntur, quorum primi ſunt generales & indefiniti, alteri verò definiti, & peculiares; quapropter miror neminem animum appuliſſe (ſi ſaltem excipias Hyperbolæ quadraturam inventam à NICOLAO MERCATORE) ad ſpeciebus accommodandam nuper repertam doctrinam Fractionum decimalium, præcipuè cùm ſic via fieri potuiſſet ad inventa difficiliora & majoris momenti. Quia verò hæc ſpecierum doctrina eandem habet rationem ad Algebram, ac numerorum decimalium ſcientia ad vulgarem Arithmeticam; hinc facilè additionem, ſubtractionem, diviſionem, multiplicationem, & Radicum extractionem diſcere quis poteſt, dummodo in decimali ac ſpecioſâ Arithmeticâ verſatus ſit, nec animum divertat unquam ab analogiâ, quæ eſt inter decimales Fractiones, & algebraïcos Terminos in infinitum productos. Nam, quod numeris accidit, id eſt, quòd eò magis eorum valor decreſcit in decimali, vel ſubdecuplâ ratione, quò magis ad dextram accedunt, id, reſpectivè, locum etiam habet in ſpeciebus, quando Termini (ut ſæpius in ſequentibus imperatur) juxta dimenſiones Numeratoris, vel Denominatoris cujuſque ſunt diſpoſiti in uniformem progreſſionem in infinitum prolatam. Et, ut Fractiones decimales hoc afferunt commodi, quòd vulgares fractæ, & radicales Quantitates, ad Arithmeticam decimalem relatæ, integrorum numerorum naturam aliquatenùs induunt, & ut integræ tractari poſſunt; ſic, utilitas, quæ ſpecioſas infinitas Series conſequitur, eſt, quòd omnigeni complicati Termini (ut Fractiones, quarum Denominator complexus eſt; Radices complexarum Quantitatum, aut affectarum Æquationum &c.) redigi poſſunt ad ſimplicium Quantitatum ordinem, id eſt, ad infinitam Fractionum Seriem, quarum Numeratores, & Denominatores ſunt ſimplices Termini, quo pacto labor non longus ſuperat difficultates, quæ ſub aliâ formâ ferè inſuperabiles viſæ fuiſſent. Quamobrem

Primò oſtendam quomodo hæ Reductiones perfici poſſint, aut, quomodo compoſitæ Quantitates reduci poſſint ad ſimplices Terminos, præcipuè cùm computandi methodus obvia non eſt.

Deinde hanc Analyſim applicabo ad ſolutionem Problematum.

Ratio

Ratio reducendi per Diviſionem, & per Extractionem Radicum patebit ſequentibus exemplis, ubi comparaveris invicem Methodos, quæ adhibentur in decimali, & ſpecioſâ Arithmeticâ.

Exempla Reductionum per Diviſionem.

Propoſitâ Fractione $\frac{aa}{b+x}$, divide aa per $b+x$, ut videbis in ſequenti ſchemate.

$$b+x)\,aa+o\,\left(\frac{aa}{b}-\frac{aax}{bb}+\frac{aaxx}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}+\frac{aax^4}{b^5},\ \text{\&c.}\right.$$

$$aa+\frac{aax}{b}$$

$$o-\frac{aax}{b}+o$$

$$-\frac{aax}{b}-\frac{aaxx}{bb}$$

$$o+\frac{aaxx}{bb}+o$$

$$+\frac{aaxx}{bb}+\frac{aax^3}{b^3}$$

$$o-\frac{aax^3}{b^3}+o$$

$$-\frac{aax^3}{b^3}-\frac{aax^4}{b^4}$$

$$o+\frac{aax^4}{b^4}+o,\ \text{\&c.}$$

Quotiens igitur eſt $\frac{aa}{b}-\frac{aax}{bb}+\frac{aaxx}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}+\frac{aax^4}{b^5}$ &c, quæ Series in infinitum prolata æquivalet $\frac{aa}{b+x}$: Si verò ſumas x pro primo Diviſoris Termino (ſic $x+b$) $aa+o$) Quotiens erit $\frac{aa}{x}-\frac{aab}{xx}+\frac{aabb}{x^3}-\frac{aab^3}{x^4}$; &c., quem invenies operando ut ſupra.

Pariter Fractio $\frac{1}{1+xx}$ mutabitur in $1 - xx + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10}$; &c. vel in $x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8} + x^{-10}$; &c.

Et Fractio $\frac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}} - 3x}$ fiet $2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 7x^{\frac{3}{2}} - 13xx + 34x^{\frac{5}{2}} - 73x^3$; &c.

Hic opportunè obſervandum eſt, quòd ego, pro $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{xx}$; $\frac{1}{x^3}$; $\frac{1}{x^4}$; &c. adhibeo x^{-1}; x^{-2}; x^{-3}; x^{-4}; &c., & $x^{\frac{1}{2}}$; $x^{\frac{3}{2}}$; $x^{\frac{5}{2}}$; $x^{\frac{1}{3}}$; $x^{\frac{2}{3}}$; &c. pro $\sqrt{x}$; $\sqrt{x^3}$; $\sqrt{x^5}$; $\sqrt[3]{x}$; $\sqrt[3]{xx}$; &c, ac $x^{-\frac{1}{2}}$; $x^{-\frac{2}{3}}$; $x^{-\frac{1}{4}}$; &c. pro $\frac{1}{\sqrt{x}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{xx}}$; $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, &c., & id nixus Analogiâ, ut perſpicies ex ſequenti, aut ſimili geometricâ Progreſſione. x^3; $x^{\frac{5}{2}}$; xx; $x^{\frac{3}{2}}$; x^1; $x^{\frac{1}{2}}$; x^0, (vel 1;) $x^{-\frac{1}{2}}$; x^{-1}; $x^{-\frac{3}{2}}$; x^{-2}; $x^{-\frac{5}{2}}$; &c.

Eodem pacto pro $\frac{aa}{x} - \frac{a^2b}{xx} + \frac{a^2b^2}{x^3}$; &c. ſcribi poteſt $a^2x^{-1} - a^2bx^{-2} + a^2b^2x^{-3}$; &c.

Pariter pro $\sqrt{a^2 - x^2}$ ſcribere licet $\overline{aa - xx}|^{\frac{1}{2}}$, & $\overline{aa - xx}|^2$ pro Quadrato ipſius $aa - xx$, & $\overline{\frac{ab^2 - y^3}{by + yy}}|^{\frac{1}{3}}$ pro $\frac{\sqrt[3]{ab^2 - y^3}}{\sqrt{by + y^2}}$, & ſic de ceteris.

Igitur haud impropriè diſtingui poſſent Poteſtates in *Affirmativas*, & *Negativas*; *Integras*, & *Fractas*.

Exempla Reductionum per Extractionem Radicis.

Si proponatur Quantitas $aa + xx$, ejus Radix quadrata ſic extrahi poteſt.

$aa + xx$

$$aa+xx\left(a+\frac{xx}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}+\frac{7x^{10}}{256a^9}-\frac{21x^{12}}{1024a^{11}}\right.$$

$$\underline{aa}$$

$$0+xx$$

$$\underline{+xx+\frac{x^4}{4aa}}$$

$$-\frac{x^4}{4aa}$$

$$\underline{-\frac{x^4}{4aa}-\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{64a^6}}$$

$$+\frac{x^6}{8a^4}-\frac{x^8}{64a^6}$$

$$\underline{+\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{16a^6}-\frac{x^{10}}{64a^8}+\frac{x^{12}}{256a^{10}}}$$

$$-\frac{5x^8}{64a^6}+\frac{x^{10}}{64a^8}-\frac{x^{12}}{256a^{10}};\ \&c.$$

$$\underline{-\frac{5x^8}{64a^6}-\frac{5x^{10}}{128a^8}+\frac{5x^{12}}{512a^{10}}}$$

$$+\frac{7x^{10}}{128a^8}-\frac{7x^{12}}{512a^{10}};\ \&c.$$

$$\underline{+\frac{7x^{10}}{128a^8}+\frac{7x^{12}}{256a^{10}}}$$

$$-\frac{21x^{12}}{512a^{10}};\ \&c.$$

Itaque Radix inventa eſt $a+\frac{xx}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}$; &c., ubi notari poteſt, quòd circa finem Operationis negligo Terminos omnes, quorum Dimenſiones ſuperant Dimenſionem Termini, quem ultimum eſſe volo; *ex. gr.* $\frac{x^{12}}{a^{11}}$.

Licet autem ordinem Terminorum ſic invertere, $xx+aa$, ac tunc Radix inventa foret $x+\frac{aa}{2x}-\frac{a^4}{8x^3}+\frac{a^6}{16x^5}-\frac{5a^8}{128x^7}$; &c.

Pariter Radix ipſius $aa - xx$ eſt $a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5}$; &c.

Et Radix $x - xx$ eſt $x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$, &c.

Ipſius $aa + bx - xx$ eſt $a + \frac{bx}{2a} - \frac{xx}{2a} - \frac{bbxx}{8a^3}$; &c.

Et $\sqrt{\frac{1+axx}{1-bxx}}$ eſt $\frac{1 + \frac{1}{2}axx - \frac{1}{8}aax^4 + \frac{1}{16}a^3x^6;\ \&c.}{1 - \frac{1}{2}bxx - \frac{1}{8}bbx^4 - \frac{1}{16}b^3x^6;\ \&c.}$

quæ præterea (reipſâ dividendo) fit

$$\begin{array}{llll} 1 + \frac{1}{2}bxx & + \frac{3}{8}bbx^4 & + \frac{5}{16}b^3x^6 & \\ \quad + \frac{1}{2}a & + \frac{1}{4}ab & + \frac{3}{16}abb; & \&c. \\ & - \frac{1}{8}aa & - \frac{1}{16}aab & \\ & & + \frac{1}{16}a^3. & \end{array}$$

Sed Operationes iſtæ ſæpius (Quantitatibus ritè præparatis) breviores fieri poſſunt, ut in ſuperiori Exemplo, in quo quærebatur $\sqrt{\frac{1+axx}{1-bxx}}$, ſi Numeratoris & Denominatoris Forma non fuiſſet eadem, cuncta duxiſſem in $\sqrt{1-bxx}$, unde habuiſſem $\frac{\sqrt{1 + \begin{matrix} a \\ -b \end{matrix} xx - abx^4}}{1-bxx}$, & opus perfeciſſem extrahendo Radicem ſolius Numeratoris, & eam dividendo per Denominatorem.

Hinc, puto, ſatis apparet, quo pacto quævis aliæ Radices extrahi poſſint, & quomodo ad infinitas ſimplicium Terminorum Series revocari valeant compoſitæ Quantitates quantùmvis Radicalibus, aut Denominatoribus (ut $x^3 + \frac{\sqrt{x - \sqrt{1-xx}}}{\sqrt[3]{axx+x^3}} - \frac{\sqrt[5]{x^3 + 2x^5 - x^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[3]{x + xx - \sqrt{2x - x^{\frac{2}{3}}}}}$) implicatæ.

De

De Reductione Affectarum Æquationum.

Jam explicare aggredior, quâ ratione Radices affectarum Æquationum in Series infinitas deduci poſſint; quod argumentum magis accuratè mihi perſequendum eſt; quia, quæ hactenus tradita fuerunt à Mathematicis de numeralibus Æquationibus, valde perplexa ſunt, & ſupervacaneis Operationibus intricata, ita ut Exemplo nobis eſſe non poſſint ad opus in ſpeciebus perficiendum. Idcircò Primùm indicabo, quomodo breviter reſolvi poſſint numerales Æquationes affectæ, Secundò eandem Methodum ad ſpecies transferam.

Sit Æquatio $y^3 - 2y - 5 = 0$ reſolvenda, & 2 ſit Numerus, (quomodocunque tandem repertus) qui minùs quàm decimâ ſui Parte differat à verâ Radice. Tunc aſſumo $2 + p = y$; & ſubſtituo $2 + p$ pro y in aſſignatâ Æquatione, undè exſurgit nova Æquatio $p^3 + 6pp + 10p - 1 = 0$; aut $p = 0,1$, quæ Quantitas quàmpropiùs Veritati accedit; quapropter eam Quotienti appono, & fingo $0,1 + q = p$, & hunc fictitium Valorem pro p repono, ut antea, quod dat $q^3 + 6,3qq + 11,23q + 0,061 = 0$; & hinc conficitur $11,23q + 0,061 = 0$, quod propè verum eſt, aut (quod propius) $q = -0,0054$; hoc autem obtinetur dividendo 0,061 per 11,23, donec habeantur tot Figuræ, quot loca ſunt inter primas hujus, & Quotientis præcipui Figuras excluſivè, ut hìc duo loca ſunt inter 2 & 0,005. Scribo igitur $-0,0054$, in inferiore Quotientis parte, quia eſt Quantitas Negativa, & facto $-0,0054 + r = q$, ſubſtituo ut ſupra, & ita proſequor Operationem quóuſque libet, ut videtur in ſubjecto Diagrammate.

Digitized by Google

$y^3 - 2y - 5 = 0$	$+ 2,10000000$ $- 0,00544852$ $+ 2,09455148$; &c. $= y$
$2 + p = y$ $\quad + y^3$ $- 2y$ $- 5$	$+ 8 + 12p + 6pp + p^3$ $- 4 - 2p$ $- 5$
Aggregatum	$- 1 + 10p + 6pp + p^3$
$0,1 + q = p$ $\quad + p^3$ $+ 6pp$ $+ 10p$ $- 1$	$+ 0,001 + 0,03q + 0,3qq + q^3$ $+ 0,06 + 1,2 + 6$ $+ 1 \quad + 10,$ $- 1$
Aggregatum	$0,061 + 11,23q + 6,3qq + q^3$
NB. $-0,0054 + r = q$ $\quad + q^3$ $+ 6,3qq$ $+ 11,23q$ $+ 0,061$	$- 0,0000001$ * $+ 0,000$ * r * * $+ 0,0001837$ * $- 0,068$ * * $- 0,060642 \quad + 11,23$ $+ 0,061$
Aggregatum	$+ 0,0005416 + 11,162r$
$- 0,00004852 + s = r$	

Sed opus, præſertim cùm Æquationes plurium Dimenſionum ſunt, ſub finem haud parùm brevius reddi poteſt hoc pacto. Statue quòuſque Radicis Extractionem velis extendere, & quot loca ſuperſunt implenda in Quotiente, tot (incipiens à primo) ſume in Coefficiente penultimi Termini Æquationis, quæ in Diagrammatis dextrâ parte formatur, ac rejice Decimales, qui ſunt extra hæc loca. At Decimales in ultimo Termino negligendos invenies, addens ſuperiori locorum numero tot loca, quot decimalium numerorum plena jam ſunt in Quotiente. Sed in antepenultimo Termino rejice eos,

NB. Habebatur — 0,0000001~~57464~~ + 0,000~~0~~87~~4~~8r + ~~0,0162r²~~ + r³.
+ 0,000183708 — 0,068~~0~~4 + ~~6,3~~

ſed, cùm Numeri tranſverſo calamo notati omittendi ſint, & Tabulam turbarent, eos huc rejecimus.

Digitized by Google

eos, qui ſunt poſt tot loca, quot reſtant dempto locorum plenorum ex implendorum numero; atque ita porrò progrediendo arithmeticè juxta locorum intervalla: Vel, quod idem eſt, ſemper abſcindi debent tot Figuræ, quot in penultimo Termino, ita ut ima loca efficiant Progreſſionem arithmeticam juxta Terminorum Seriem, aut, (cùm aliter accidit) ſupponi debent ſuppleta circulis; ſic in præſenti Exemplo, ſi Opus perſequi nolim ultra octavum Decimalium locum, poſtquàm poſui pro q, $0{,}0054+r$ (ubi quatuor loca Decimalium impleta ſunt in Quotiente, ac totidem implenda remanent) negligere poſſum Figuras, quæ quinque loca inferiora tenent, quas idcircò tranſverſo calamo notavi, & omittere poſſem etiam primum Terminum r^3 quamvis illius Coefficiens eſſet $0{,}99999$, &c. Deletis igitur his Figuris, Operatio ſequens dat Aggregatum; $0{,}0005416+11{,}162r$, unde, per Diviſionem productam quouſque Terminus præſcribit, educitur $-0{,}00004852=r$, quæ Quantitas Quotientem, quò volebamus, perducit. Nunc, ſubductâ negativâ Quotientis Parte ex affirmativâ, habebimus $2{,}09455148$, Radicem Æquationis propoſitæ.

Pariter obſervari poteſt, quòd ſi, in Operis initio, dubitarem utrùm $0{,}1=p$ ſatis Radici propinquaret, pro $10p-1=0$ finxiſſem $6pp+10p-1=0$, & Quotienti apposuiſſem primam hujus Radicis Figuram, tanquàm nihilo propiorem; & benè hoc pacto reperietur ſecunda, aut etiam quarta Figura Quotientis, cùm in ſecundariâ Æquatione, quam tractas, Quadratum ex Coefficiente penultimi Termini decuplum ſaltèm non eſt producti ex ultimo Termino in Coefficientem antepenultimi; Imò quidem ſæpius laborem imminues, præcipuè cùm Æquationes ad plures Dimenſiones aſcendunt, quærendo Figuras omnes Quotienti addendas eâdem methodo, ſcilicet extrahendo minimam Radicum ex tribus ultimis Terminis Æquationis ſecundariæ; ſic enim plerumque Figuras duplo plus Quotienti lucraberis.

Jam ex numeralium ad ſpecioſarum Æquationum ſolutionem tranſeamus; ſed præmittendum eſt

Primò, quòd unus (quicunque tandem ille ſit) ex ſpecioſis, aut literalibus Coefficientibus, quando plures adſunt, à ceteris ſegregandus eſt, aut ſupponendus multò major, aut multò minor quàm reliqui omnes, vel proximior datæ Quantitati. Ratio eſt, quòd quia

ejus

ejus Dimenſiones ſemper creſcunt in Numeratoribus, vel Denominatoribus Terminorum Quotientis, hi Termini jugiter decreſcunt, & idcircò Quotiens aſſiduè accedit ad Radicem quæſitam, ut perſpici poteſt ex iis, quæ ſuperiùs obſervavimus de ſpecie x in Exemplis Reductionum per Diviſionem & Radicis Extractionem. In ſequentibus autem pro his ſpeciebus uſurpabo x vel z; & y; p; q; r; s; &c. pro Radicalibus ſpeciebus extrahendis.

Secundò, quòd cùm Fractiones complexæ, ſive Quantitates ſurdæ occurrunt in propoſitis Æquationibus, aut deinde ſuboriuntur in proceſſu, removendæ ſunt Methodis; quas Analyſtæ ſatis norunt. Ut ſi haberes $y^3 + \frac{bb}{b-x} yy - x^3 = 0$, Æquationem duc in $b-x$, & ex Producto $\frac{b}{-x} y^3 + bbyy \frac{-bx^3}{+x^4} = 0$ quære Valorem ipſius y. Potes etiam fingere $y \times \overline{b-x} = u$, & ſcribens $\frac{u}{b-x}$ pro y, reperies $u^3 + bbuu - b^3 x^3 + 3bbx^4 - 3bx^5 + x^6 = 0$; hinc excude Radicem u; atque ut obtineas y, Quotientem divide per $b-x$. Item ſi Æquatio $y^3 - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{3}} = 0$ proponeretur, aſſumere potes $y^{\frac{1}{2}} = u$, & $x^{\frac{1}{3}} = z$, ac ſubſtitutis uu pro y, & z^3 pro x, exſurget $u^6 - z^3 u + z^4 = 0$, in quà Æquatione reſolutâ reſtitui debent x, & y. Invenietur enim Radix $u = z + z^3 + 6z^5$, &c., &, reſtituendo y ac x, habebitur $y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}} + x + 6x^{\frac{5}{3}}$; &c. & quadrando, $y = x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}} + 13xx$; &c.

Pariter, ſi adeſſent negativæ Dimenſiones x, vel y, removeri poſſent ducendo in x, vel y; ut, ſi daretur Æquatio $x^3 + 3xxy^{-1} - 2x^{-1} - 16y^{-3} = 0$; duc in x, & y^3, unde conficietur $x^4 y^3 + 3x^3 y^2 - 2y^3 - 16x = 0$; Et ſi Æquatio eſſet $x = \frac{aa}{y} - \frac{2a^3}{yy} + \frac{3a^4}{y^3}$ multiplica per y^3; & habebis $xy^3 = aayy - 2a^3 y + 3a^4$, & ſic de ceteris.

Tertiò, Æquatione ſic præparatâ; Opus incipiendum eſt ab inventione primi ex Terminis Quotientis; ad hujus autem, & ſequentium Terminorum inveſtigationem conducit Regula generalis, cùm

indefini-

indefinitæ ſpecies (x vel y) parvæ ſupponuntur, ad quem caſum duo reliqui poſſunt revocari.

Regula autem hæc eſt. Ex omnibus Terminis, è quibus abſunt ſpecies radicales (y; p; q; r; &c.) elige illum, in quo ſpecies indefinita (x; vel z; &c.) minimæ Dimenſionis eſt; Deinde elige alium Terminum, qui radicalem ſpeciem contineat, & talis ſit, ut Progreſſio Dimenſionum uniuſcujuſque ex ſupradictis ſpeciebus, aut quo majori poteſt gradu deſcendat, aut quo minori aſcendat; Et ſi plures ſunt Termini, quorum Dimenſiones non recedant ab hac Progreſſione, quòuſque libet producta, pariter ſumendi ſunt. Demum ex his Terminis ita ſepoſitis, & nihilo æquatis, excude valorem dictæ radicalis ſpeciei, & illum Quotienti adſcribe.

Sed, ut hæc Regula meliùs intelligatur, illi lucem afferam ſequenti Diagrammate. Fac Angulum BAC, & ejus latera BA, AC, divide in æquales partes, & eductis Perpendicularibus, diſtribue ſpa-

B	x^4	x^4y	x^4yy	x^4y^3	x^4y^4	x^4y^5	x^4y^6	&c.	
	x^3	x^3y	x^3yy	x^3y^3	x^3y^4	x^3y^5	x^3y^6	&c.	
	xx	xxy	$xxyy$	xxy^3	xxy^4	xxy^5	xxy^6	&c.	
	x	xy	xyy	xy^3	xy^4	xy^5	xy^6	&c.	
A	1	y	yy	y^3	y^4	y^5	y^6	&c.	C

tium Angulare in æqualia Quadrata vel Parallelogramma, quæ concipies denominata a Dimenſionibus ſpecierum x & y iis inſcriptarum. Deinde, propoſitâ Æquatione, aliquo Signo nota Parallelogramma reſpondentia omnibus ejuſdem Terminis, & Regulam applica duobus, aut fortè pluribus ex Parallelogrammis ita notatis, quorum unum ſit imum in columnâ AB ad ſiniſtram poſitâ, alterum verò contingat Regulam verſùs dextram, & reliqua omnia Regulam non tangentia ſint ſupra eam. Tum ſume eos Æquationis Terminos, qui Parallelogrammis à Regulâ tactis includuntur, & ex iis extrude Quantitatem in Quotiente ponendam. Sic ſi Radix y debeat extrahi ex Æquatione $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7aaxxyy + 6a^3x^3 + bbx^4 = 0$; noto (*Fig.* 1.) Parallelogramma pertinentia ad Terminos TAB. I.

minos hujus Æquationis Aſterico *, ut hic factum vides. Deindè Regulam DE applico ad infimum parallelogrammorum notatorum in ſiniſtrâ columnâ, & Regulam in gyrum dextrorſùm ago ex inferioribus verſùs ſuperiora; donec incipiat ſimiliter aliud, vel fortè plura ex parallelogrammis notâ diſtinctis contingere, & video loca ſic tacta eſſe ea quibus includuntur termini x^3, $xxyy$, & y^6. Igitur ex his effingo Æquationem $y^6 - 7aaxxyy + 6a^3x^3 = 0$, (quam præthereà, ſi placet, redigo ad $u^6 - 7uu + 6 = 0$, ponendo $y = u \;\; ax$,) ac ex ea quæro Valorem ipſius y, quem invenio quadruplicem, nempè $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$, & $-\sqrt{2ax}$, è quibus quemlibet aſſumere poſſum pro Quotientis Termino primo, tamen ſeligendus eſt ille qui convenit huic aut illi Radici, quam extrahere cupio.

Sic, propoſitâ Æquatione $y^5 - byy + 9bxx - x^3 = 0$; ſegrego Terminos $- byy + 9bxx$, & hinc habeo $y = 3x$ pro Quotientis Termino primo.

Et ſi daretur $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$, acciperem $y^3 + aay - 2a^3$, cujus Radix eſt $+a$, quam Quotienti adſcribo.

Paritet, ſi haberem $xxy^5 - 3c^4xyy - c^5xx + c^7 = 0$; excerperem $xxy^5 + c^7$, undè obtinerem $y = -\sqrt[5]{\frac{c^7}{xx}}$, quæ Quantitas eſſet primus Quotientis Terminus. Atque ita porrò.

Sed hoc Termino reperto, ſi is aliquam Poteſtatem negativam includit, Æquationem deprimo eâdem indefinitæ ſpeciei Poteſtate, tùm ut neceſſarium non ſit eam deprimere in ipſâ Reſolutione, tùm ut concinnè adhiberi poſſit Regula inferiùs tradenda de ſuppreſſione Terminorum ſupervacaneorum. Sic, propoſitâ Æquatione $8z^6y^3 + az^6yy - 27a^9 = 0$, cujus Radix incipit à Terminô $\frac{3a^3}{2zz}$; eam deprimo ipſâ zz, antequàm Reſolutionem aggrediar, ita ut evadat $8z^4y^3 + az^4yy - 27a^9z^{-2} = 0$.

Tùm, opere progrediente, reliqui Termini, quibus Quotiens augendus eſt, eodem pacto excuduntur ex variis Æquationibus ſecundariis, ſed plerùmque minori conatu; nam totum nego-

tium perficitur dividendo infimum ex iis Terminis, qui & indefinitè parvis ſpeciebus (x, xx, x^3, &c.) ſunt affecti & Radicalium ſpecierum (p, q, r, &c.) expertes, per Quantitatem quâ afficitur Quantitas Radicalis unius Dimenſionibus & libera ab indefinitâ ſpecie, & Quotienti adſcribendo quidquid indè conficitur. Sic in exemplo ſequenti Termini $\frac{x}{4}$, $\frac{xx}{64a}$, $\frac{131x^3}{512aa}$, &c. gignuntur dividendo aax, $\frac{1}{16}aax$, $\frac{131}{128}x^3$, &c. per $4aa$.

Quibus præmiſſis, exhibenda ſupereſt praxis Reſolutionis. Sit igitur Æquatio $y^3+aay+axy-2a^3-x^3=0$, ea cujus petitur Reſolutio. Ex aliquot ejus Terminis conficio fictitiam Æquationem $y^3+aay-2a^3=0$ (juxta ea quæ tertio loco præmiſimus) & hinc obtineo $y-a=0$; quapropter ſcribo in Quotiente $+a$: ſed quia $+a$ non eſt accuratè Valor ipſius y, ſuppono $a+p=y$, & in Terminis Æquationis margini adſcriptæ pono $a+p$ pro y, & iterùm in margine ſcribo Terminos hinc exeuntes ($p^3+3app+apx$, &c.), inter quos denuò, per tertio loco præmiſſa, eligo Terminos $4aap+aax=0$ tanquam fictitiam Æquationem, quæ cum det $p=-\frac{1}{4}x$, ſcribo in Quotiente $-\frac{1}{4}x$: Quia tamen $-\frac{1}{4}x$ non æquat juſtum Valorem ipſius p, facio $-\frac{1}{4}x+q=p$, & in marginalibus Terminis pro p ſubſtituo $-\frac{1}{4}x+q$, atque Terminos indè conflictos ($q^3-\frac{3}{4}qqx+3aqq$, &c.) rurſùs margini adſcribo, è quibus iterùm, juxta præcedentem Regulam, ſegrego Terminos $4aaq-\frac{1}{16}axx=0$ pro fictâ Æquatione, quæ quia præbet $q=\frac{xx}{64a}$, hàc ipſâ Quantitate Quotientem augeo. Item quia $\frac{xx}{64a}$ non eſt accuratus Valor ipſius q, ſuppono $\frac{xx}{64a}+r=q$, & in Terminis marginalibus pro q ſubſtituo $\frac{xx}{64a}+r$, & ſic pergo quòuſque libet, ut præ oculis ponit ſequens Tabella.

$y^3+aay-2a^3+axy-x^3=0$		$y=a-\frac{x}{4}+\frac{xx}{64a}+\frac{131x^3}{512aa}+\frac{509x^4}{16384a^3}$, &c.
$+a+p=y$	$+y^3$	$+a^3+3aap+3app+p^3$
	$+axy$	$+aax+apx$
	$+aay$	$+a^3+aap$
	$-x^3$	$-x^3$
	$-2a^3$	$-2a^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	$+p^3$	$-\frac{1}{64}x^3+\frac{3}{16}qxx-\frac{3}{4}qqx+q^3$
	$+3app$	$+\frac{3}{16}axx-\frac{3}{2}aqx+3aqq$
	$+apx$	$-\frac{1}{4}axx+aqx$
	$+4aap$	$-aax+4aaq$
	$+aax$	$+aax$
	$-x^3$	$-x^3$
$+\frac{xx}{64a}+r=q$	$+q^3$	*
	$-\frac{3}{4}qqx$	*
	$+3aqq$	$+\frac{3x^4}{4096a}$ * $+\frac{3}{32}rxx+3arr$
	$+\frac{3}{16}qxx$	$+\frac{3x^4}{1024a}$ * $+\frac{3}{16}rxx$
	$-\frac{1}{2}aqx$	$-\frac{1}{128}x^3 \quad -\frac{1}{2}arx$
	$+4aaq$	$+\frac{1}{16}axx \quad +4aar$
	$-\frac{65}{64}x^3$	$-\frac{65}{64}x^3$
	$-\frac{1}{16}axx$	$-\frac{1}{16}axx$
$+4aa-\frac{1}{2}ax+\frac{9}{32}xx)+\frac{131}{128}x^3-\frac{15x^4}{4096a}(+\frac{131x^3}{512aa}+\frac{509x^4}{16384a^3}$		

Si

Si Quotiens ad certam periodum tantùm perducendus foret, ita ut, ex. gr., in ultimo Termino x non aſcenderet ſupra datam Dimenſionem, faciens Terminorum ſubſtitutionem, eos omitto quos non uſu-venturos prævideo; quâ de re hæc habetur Regula: Primo Termino, qui ſuboritur ex quâvis Quantitate in collaterali margine, tot ſubjungito verſùs dextram, quot ſunt Unitates, quibus Index ejus Poteſtatis, quæ altiſſima debet eſſe in Quotiente, excedit Indicem iſtius ſuborti Termini.

Volo, ut præſenti utar exemplo, ut Quotiens (aut in Quotiente ſpecies x) altiùs non aſcendat quàm, puta, ad quartam Dimenſionem. Omitto itaque Terminos omnes poſt x^4, & unum pono poſt x^3: Quocirca pro deletis habendi ſunt omnes Termini poſt ſignum *. Hoc pacto opus proſequere quoad tandem pervenias ad Terminos $\frac{515x^4}{4096a} - \frac{131x^3}{128} + 4aar - \frac{1}{2}arx$, in quibus p, q, r, aut s, quæ repræſentant Radicis extrahendæ ſupplementa, ſunt unius Dimenſionis, & è quibus per Diviſionem tot potes obtinere Terminos, quot deſiderari vidiſti ad Quotientem complendum (id eſt $\frac{131x^3}{512aa} + \frac{509x^4}{16384a^3}$); itaque demùm habebis $y = a - \frac{1}{4}x + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512aa} + \frac{509x^4}{16384a^3}$, &c.

Rem meliùs explicaturus addam aliud exemplum reſolvendum. Detur Æquatio $\frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}yy + y - z = 0$; & Quotiens inveniendus ſit uſque ad quintam Dimenſionem tantùm, & ſuperflui Termini rejecti concipiantur poſt ſignum, *&c.*

$\frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}yy + y - z = 0$		$y = z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$, &c.
$z + p = y$	$+\frac{1}{5}y^5$	$+\frac{1}{5}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{4}y^4$	$-\frac{1}{4}z^4 - pz^3$, &c.
	$+\frac{1}{3}y^3$	$+\frac{1}{3}z^3 + pzz + ppz$, &c.
	$-\frac{1}{2}yy$	$-\frac{1}{2}zz - pz - \frac{1}{2}pp$
	$+y$	$+z + p$
	$-z$	$-z$
$\frac{1}{2}zz + q = p$	$+ppz$	$+\frac{1}{4}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{2}pp$	$-\frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{2}qzz$, &c.
	$-pz^3$	$-\frac{1}{2}z^5$, &c.
	$+pzz$	$+\frac{1}{2}z^4 + qzz$
	$-pz$	$-\frac{1}{2}z^3 - qz$
	$+p$	$+\frac{1}{2}zz + q$
	$+\frac{1}{5}z^5$	$+\frac{1}{5}z^5$
	$-\frac{1}{4}z^4$	$-\frac{1}{4}z^4$
	$+\frac{1}{3}z^3$	$+\frac{1}{3}z^3$
	$-\frac{1}{2}zz$	$-\frac{1}{2}zz$

$$1 - z + \frac{1}{2}zz)\ \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{20}z^5\ (\frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$$

Pariter

Paritèr, ſi proponas Æquationem $\frac{63}{2816}y^{11} + \frac{35}{1152}y^9 + \frac{5}{112}y^7 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{1}{6}y^3 + y - z = 0$ reſolvendam ſolùm ad nonam uſque Quotientis Dimenſionem, rejicere potes ante ipſum Operis exordium $\frac{63}{2816}y^{11}$, & inter operandum omnes Terminos qui ſuperant z^9, admittere autem unum poſt z^7, duos poſt z^5; obſervabis enim Quotientem paritèr aſcenſurum per duarum Unitatum intervalla, hoc pacto z, z^3, z^5, z^7, &c. Demùm autem habebis $y = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$, &c.

Hinc detegitur artificium, quo Æquationes affectæ *in infinitum*, aut conſtantes infinito Terminorum numero, tamen reſolvi poſſunt: Videlicet, antequàm opus aggrediaris, rejice omnes Terminos in quibus Dimenſio ſpeciei indefinitè parvæ & non affectæ à Radicali ſpecie excedit altiſſimam Dimenſionem in Quotiente requiſitam, aut è quibus, cùm pro Radicali ſpecie ſubſtituis primum Terminum detectum ope Parallelogrammi, ut ſuprà, exſurgere nequeunt niſi Termini excedentes; eâ de cauſâ in ultimo exemplo Terminos omiſi ultra y^9, licèt ad infinitum progrederentur. Eodem pacto, ut Cubica Radix extrahatur uſque ad quartam Dimenſionem ipſius z ex Æquatione

$$0 = \begin{cases} -8 + zz - 4z^4 + 9z^6 - 16z^8, \text{ \&c.} \\ +y \text{ in } zz - 2z^4 + 3z^6 - 4z^8, \text{ \&c.} \\ -yy \text{ in } zz - z^4 + z^6 - z^8, \text{ \&c.} \\ +y^3 \text{ in } zz - \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{3}z^6 - \frac{1}{4}z^8, \text{ \&c.} \end{cases}$$

omitto Terminos in infinitum omnes ſuperiores iis qui conſtantur ex $+y^3$ in $zz - \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{3}z^6$, & ex $-yy$ in $zz - z^4 + z^6$, atque ex $+y$ in $zz - 2z^4$, & ex 1 in $-8 + zz - 4z^4$. Quapropter hanc ſolam Æquationem reſolvendam aſſumo $\frac{1}{3}z^6y^3 - \frac{1}{2}z^4y^3$
$+ zzy^3$

$z^4y^3 + zzy^3 - z^6yy + z^4yy - zzyy - 2z^4y + zzy - 4z^4 + zz - 8 = 0$: Primus enim Quotientis Terminus ($2z^{-\frac{2}{3}}$) ſubſtitutus pro y in eâ Æquationis depreſſæ per $z^{\frac{2}{3}}$ parte quam negleximus, dat ſemper plus quàm quatuor Dimenſiones.

Quadratis Æquationibus accomodari poſſunt quæ de altioribus diximus; ut ſi peteretur Radix hujus Æquationis

$$0 = \begin{cases} yy \\ -y \text{ in } a + x + \dfrac{xx}{a} + \dfrac{x^3}{aa} + \dfrac{x^4}{a^3}, \text{ \&c.} \\ + \dfrac{x^4}{4aa} \end{cases}$$

uſque ad x^6; omitto cunctos in infinitum Terminos altiores quàm $-y$ in $a + x + \frac{xx}{a}$, & ſolùm aſſumo Æquationem $yy - ay - xy - \frac{xx}{a}y + \frac{x^4}{4aa} = 0$, quam reſolvo aut more ſolito faciens $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x + \frac{xx}{2a} - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ax + \frac{3}{4}xx + \frac{x^3}{2a}}$, aut breviùs & faciliùs jam traditâ affectarum Æquationum methodo, quâ obtinebis $y = \frac{x^4}{4a^3} - \frac{x^5}{4a^4}$ *, in quâ ultimus requiſitus Terminus evaneſcit, aut æqualis nihilo fit.

Radices autem poſtquàm extractæ ſunt uſque ad ſatis magnum Terminorum numerum, ulteriùs quòuſque libet extrahi poſſunt, ſolâ Serierum Analogiâ benè obſervatâ. Sic in infinitum proſequi potes hanc $z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$, &c. (quæ eſt Radix Æquationis infinitæ $z = y - \frac{1}{2}yy + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4$ &c.) ſemper dividendo Terminum ultimum per hanc Numerorum ſeriem 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.; & hæc $z - \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$, &c. produci poteſt, continuam faciendo Diviſionem

per

per Numeros 2×3, 4×5, 6×7, 8×9, &c.: Rurſus hujus $a+\frac{xx}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}$, &c., quotvis Termini reperiri poſſunt, jam repertos reſpectivè multiplicando per Fractiones $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{6}$, $-\frac{5}{8}$, $-\frac{7}{10}$, &c., & ſic de reliquis.

Sed, cùm inveſtigatur primus Quotientis Terminus, aut aliquando etiam ſecundus, vel tertius, ſeſe offerre poteſt difficultas ſuperanda; nam, ejus valor, ut ſupra detectus, eſſe poteſt Quantitas ſurda, vel inextricabilis Radix altioris Æquationis affectæ; quando autem id fortè evenit, Radix iſta, (dummodò non ſit impoſſibilis,) exponi poteſt per aliquam Litteram, quo facto procedemus more ſolito, tanquam ſi cognita foret. Ut in exemplo $y^3+axy+aay-x^3-2a^3=0$, ſi Radix Æquationis $y^3+aay-2a^3=0$ eſſet ſurda aut incognita, ponere potuiſſem aliquam Litteram (puta, b) pro eâ, & perfeciſſem Solutionem, ut ſequitur, poſito quòd inveniendus eſſet Quotiens tantùm uſque ad tertiam Dimenſionem.

$$y^3+aay+axy-2a^3-x^3=0.\ \text{Fac}\ aa+3bb=cc:\ \text{Tunc}$$

$$y=b-\frac{abx}{cc}+\frac{a^4bxx}{c^6}+\frac{x^3}{cc}+\frac{a^3b^3x^3}{c^6}-\frac{a^5bx^3}{c^8}+\frac{a^5b^3x^3}{c^{10}};\ \&c.$$

$b+p=y \quad +y^3$	$+b^3+3bbp+3bpp+p^3$
$+axy$	$+abx+apx$
$+aay$	$+aab+aap$
$-x^3$	$-x^3$
$-2a^3$	$-2a^3$
$-\frac{abx}{cc}+q=p \quad +p^3$	$-\frac{a^3b^3x^3}{c^6};\ \&c.$
$+3bpp$	$+\frac{3aab^3xx}{c^4}-\frac{6ab^3x}{c^2}q;\ \&c.$
$+apx$	$-\frac{aabxx}{cc}+aqx$
$+pcc$	$-abx+ccq$
$-x^3$	$-x^3$
$+abx$	$+abx$

$$cc+ax-\frac{6abbx}{cc}\Big)\ \frac{a^4bxx}{c^4}+x^3+\frac{a^3b^3x^3}{c^6}\Big(\ \frac{a^4bxx}{c^6}+\frac{x^3}{cc}+\frac{a^3b^3x^3}{c^8};\&c.$$

Hìc,

Hic, ſcripto b in Quotiente, fingo $b+p=y$, & poſteà illum ſubſtituo pro y, ut vides, undè oritur p^3+3bpp, &c., rejectis Terminis $b^3+aab-2a^3$, ut nihilo æqualibus; ſuppoſuimus enim b eſſe Radicem Æquationis $y^3+aay-2a^3=0$. Termini verò $3bbp+aap+abx$ dant $p=-\frac{abx}{3bb+aa}$, quæ Quantitas adjungenda eſt Quotienti, & pro p ſubſtituendum $-\frac{abx}{3bb+aa}+q$.

Sed, brevitatis gratiâ, ſcribo cc pro $3bb+aa$, quæ tamen Quantitas $3bb+aa$ reſtituenda eſt, quandocunque percipiam hoc pacto Terminos fieri breviores. Opere peracto, aſſumo Numerum aliquem pro a, & reſolvo Æquationem $y^3+aay-2a^3=0$, ut ſupra indicavi de numeralibus Æquationibus, & pro b pono aliquam ex ejus Radicibus, ſi tres Radices ea habeat. Seu potiùs hanc Æquationem libero à ſpeciebus, (quantùm fieri poteſt,) & præſertim ab indefinitis, eâ methodo quam ſupra inſinuavimus; & pro reliquis, ſi quæ reſtant quæ expelli nequeant, pono Numeros: Sic $y^3+aay-2a^3=0$ liberari poteſt ab a, Radice per a diviſâ, undè fit $y^3+y-2=0$, cujus Radicem quære, per a multiplica, & ſubſtitue pro b.

Hactenùs ſpecies indefinitas parvas eſſe ſuppoſuimus. Si verò quàm propiùs accedere ponerentur datæ Quantitati, pro indefinitè parvâ differentiâ iſtâ ſpeciem aliquam adhibeo, quâ ſubſtitutâ ſolvo Æquationem ut anteà: Scio, *ex. gr.*, aut ſuppono, quòd in Æquatione $\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}yy+y-x+a=0$ eſt x ferè æqualis alicui Quantitati, ut a. Dico igitur earum differentiam eſſe z, & ſcribendo pro x, $a+z$, vel $a-z$, conficietur $\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}yy+y\pm z=0$, quæ ſolvi poteſt Methodo jam præſcriptâ.

Quòd ſi hæc ſpecies poneretur indefinitè magna, ſcriberem aliquam ſpeciem pro ejus Reciprocâ, quæ idcirco eſſet indefinitè parva, & ſpecie iſtâ ſubſtitutâ, progredior ad Reſolutionem more ſolito. Proponatur, *ex. gr.*, $y^3+yy+y-x^3=0$, & ſciamus

Digitized by Google

ſciamus aut fingamus, quòd x ſit Quantitas permagna; tunc pono z pro ejus parvâ Reciprocâ $\frac{1}{x}$, & $\frac{1}{z}$ ſubſtitutâ pro x dabit $y^3 + yy + y - \frac{1}{z^3} = 0$, cujus Radix eſt $y = \frac{1}{z} - \frac{1}{3} - \frac{2}{9}z + \frac{7}{81}zz + \frac{5}{81}z^3$, &c., quæ, reſtituto, ſi placet, x, evadet $y = x - \frac{1}{3} - \frac{2}{9x} + \frac{7}{81xx} + \frac{5}{81x^3}$, &c.

Sin autem iſtarum artium nulla ex animi ſententiâ ſuccederet, ad aliam confugere potes. Ut, in Æquatione $y^4 - xxyy + xyy + 2yy - 2y + 1 = 0$, in quâ primus Radicis Terminus quæri deberet ex Hypotheſi, quòd $y^4 + 2yy - 2y + 1 = 0$; ſed hæc Æquatio nullam habet Radicem poſſibilem; quare tentabis quid poſſis aliquâ aliâ ratione conficere. Potes, *ex. gr.*, ſupponere, quòd x parùm differat à $+2$, vel quòd $2 + z = x$; ſubſtituens autem $2 + z$ pro x invenies $y^4 - zzyy - 3zyy - 2y + 1 = 0$, & Quotiens incipiet ab Unitate. Potes etiam ſupponere quòd x eſt Quantitas indefinitè magna, vel quòd $\frac{1}{x} = z$, undè deduces $y^4 - \frac{yy}{zz} + \frac{yy}{z} + 2yy - 2y + 1 = 0$, & z chorum Terminorum ducet in Quotiente.

Hoc pacto procedens juxta varias Hypotheſes, potes variis modis Radicem extrahere & exprimere.

Si vis determinare quot modis hoc perfici poteſt, tibi perſpiciendum eſt quot ſunt Quantitates, quæ ſcriptæ in Æquatione propoſitâ pro indefinitâ ſpecie Æquationem illam diviſibilem reddunt per $y +$ vel $-$ aliquâ Quantitate, vel per y tantùm; Hoc, *ex. gr.*, accidet in Æquatione $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$, ſi ſubſtituas $+ a$ vel $- a$, vel $- 2a$, vel $- \overline{2a^3}|^{\frac{1}{3}}$ pro x. Quocirca benè potes ſupponere Quantitatem x parum differre ab $+ a$ vel $- a$ vel $- 2a$ vel $- \overline{2a^3}|^{\frac{1}{3}}$, & totidem modis extrahere Radicem Æquationis propoſitæ, & forſan rurſùs totidem modis ponendo has differentias indefinitè magnas. Præterea, ſi ſumas pro indefinitâ Quantitate

titate nunc hanc, nunc illam ex ſpeciebus Radicem exprimentibus; voti compos fies fortè aliis modis; & iterum aliis ſubſtituendo pro indefinitâ ſpecie quoſvis fictitios valores, ut $az+bzz$, $\frac{a}{b+z}$, $\frac{a+cz}{b+z}$; &c., & operando, ut anteà, in Æquatione hinc proveniente.

Ut autem in apertum ponatur veritas hujus Concluſionis, nempe quòd Quotientes ſic inventi, & producti ad libitum adeò propè ad Æquationis Radicem accedunt, ut denique ab eâ differant Quantitate minori, quàm quævis aſſignabilis, & idcirco quòd in infinitum protracti omninò ab eâ non differunt, animadvertendum eſt quòd Quantitates, quæ ſunt in ſiniſtrâ Columnâ dextri Lateris Diagrammatis, ſunt ultimi Termini Æquationum, quarum Radices ſunt p, q, r, s; &c., & quòd, illis evaneſcentibus, evaneſcunt quoque Radices p, q, r, s; &c., id eſt, differentiæ inter Quotientem & Radicem quæſitam; ita ut Quotiens nihil omninò tunc differat à verâ Radice. Quapropter ſub ipſum Operis initium, ſi videas quòd Termini, qui ſunt in indicatâ Columnâ, ſeſe omnes invicem deſtruant, concludendum eſt Quotientem huc uſque protractum perfectam Æquationis Radicem eſſe: Quòd ſi res alitèr ſe habeat, videbis tamen quòd omnes Termini, in quibus ſpecies indefinitè parva eſt paucarum Dimenſionum, id eſt, omnes maximi Termini auferuntur à Columnâ iſtâ, ita ut denique, aut nulli reſtent in eâ, aut ii tantùm, qui aſſignatâ quâlibet Quantitate minores ſunt, & idcirco nihilo non majores, ubi Opus in infinitum eſt protractum; ergo Quotiens extractus in infinitum eſt demum ipſiſſima Radix.

Denique, licèt ſpecies, quæ, perſpicuïtatis gratiâ, fuerunt hactenùs ſuppoſitæ indefinitè parvæ, ſupponantur quantumvis magnæ, tamen Quotiens erit adhuc verus, quanquam non adeò celeriter ad veram Radicem convergat: Quod patet ex rerum Analogiâ. Sed hìc conſiderandi ſunt Radicum Limites, aut maximæ & minimæ Quantitates; nam, harum proprietates communes ſunt finitis & infinitis Æquationibus: In his Radix eſt maxima vel minima; cùm maxima aut minima eſt differentia, quæ intercedit inter Aggregata affirmativorum & negativorum Terminorum; limitata autem eſt, quando indefinita Quantitas, (quæ propterea non malè ſupponi poteſt

teſt perexigua,) major fieri nequit, quin Radicis magnitudo ſtatim evadat infinita, id eſt, impoſſibilis.

Ad huic argumento lucem affundendam ſit (*Fig.* 2.) ACD ſemicirculus deſcriptus ſupra Diametrum AD, & ſit BC ordinatim Applicata. Fac $AB = x$; $BC = y$; $AD = a$. Erit igitur $y = \sqrt{ax - xx} = \sqrt{ax} - \frac{x}{2a}\sqrt{ax} - \frac{xx}{8aa}\sqrt{ax} - \frac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}$; &c., ut ſupra. Quapropter, tunc BC vel y evadit maxima, cùm $\sqrt{ax}$ maximo intervallo ſuperat omnes Terminos $+ \frac{x}{2a}\sqrt{ax} + \frac{xx}{8aa}\sqrt{ax} + \frac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}$; &c., id eſt, cùm $x = \frac{1}{2}a$; terminata autem eſt cùm $x = a$; ſi enim fingas x majorem quàm a, Summa omnium Terminorum $- \frac{x}{2a}\sqrt{ax} - \frac{xx}{8aa}\sqrt{ax} - \frac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}$; &c. in infinitum excreſcet; ſed etiam eſt alter Limes, cùm ſcilicet $x = 0$, ob impoſſibilitatem ipſius $\sqrt{-ax}$, quibus Terminis, ſive Limitibus reſpondent ſemicirculi Limites, ſive Termini. TAB. I.

TRANSITIO AD

METHODUM FLUXIONUM.

Hactenùs de hâc computandi Methodo, cujus frequens erit uſus in ſequentibus. Nunc reſtat ut ad Artis analyticæ illuſtrationem proferam nonnulla Problematum ſpecimina, & præſertim eorum, quibus Curvarum natura magis in patulo poni poſſit. Sed antea obſervandum eſt, quòd, quidquid in iis arduum eſt, revocari poteſt ad duo ſequentia Problemata, quæ proponam de Spatio deſcripto per localem Motum, vel acceleratum, vel retardatum.

I.

Longitudine deſcripti ſpatii ſemper, (id eſt, quovis Temporis momento,) datâ, invenire Velocitatem Motûs Tempore propoſito.

I I.

Velocitate Motûs ſemper datâ, invenire Longitudinem ſpatii deſcripti Tempore propoſito.

Si, *ex gr.*, in Æquatione $xx = y$ exponit y Longitudinem Spatii quodam momento Temporis percurſi, quod Tempus menſuratur & deſcriptum exhibetur ab alio ſpatio x creſcente juxta uniformem Celeritatem $\dot{x}$; exponet $2x\dot{x}$ Celeritatem, quâ Spatium y eodem Temporis momento progreditur ad ulteriorem ſui deſcriptionem, & vice verſâ. Hinc fit, ut in ſequentibus conſiderem Quantitates tanquam genitas continuo Incremento, ut Spatium, quod Corpus aut quælibet res mota deſcribit.

Cùm autem hìc Tempus tantùm conſiderandum veniat, tanquam expoſitum & menſuratum æquabili Motu locali, &, præterea, cùm ſolæ Quantitates ejuſdem generis invicem comparari valeant, ut & Velocitates, quibus augentur aut minuuntur: Idcirco, in iis, quæ ſequuntur, Tempus *formalitèr* non conſidero, ſed ſuppono, quòd una ex propoſitis Quantitatibus homogenea cum aliis creſcat æquabili Fluxu, ad quam ceteræ, tanquam ad Tempus, referantur, quæ ideò per Analogiam non inconcinnè dici poteſt *Tempus*. Quoties igitur vox *Tempus* in ſequentibus invenietur, (eam autem ſæpiuſculè uſurpavi perſpicuitatis & diſtinctionis cauſâ,) hoc verbum ſumendum eſt, non quaſi Tempus intellexiſſem in ſuâ *formali* ſignificatione, ſed tanquam ſignificans Quantitatem illam à Tempore diverſam, cujus æquabili Incremento vel Fluxu Tempus exponitur & menſuratur.

Nunc in poſterum *Fluentes* vocabo Quantitates has, quas conſidero tanquam gradatim & indefinitè creſcentes, eáſque repræſentabo per ultimas Alphabeti litteras u, y, x, & z, ut diſcerni poſſint ab aliis Quantitatibus, quæ in Æquationibus conſiderantur tanquam cognitæ & determinatæ; & quæ idcirco per primas Alphabeti litteras a, b, c; &c. exponuntur. At Velocitates, quibus ſingulæ Fluentes augentur per Motum generantem, (quas Velocitates appello *Fluxiones*, aut ſimplicitèr *Velocitates* vel *Celeritates*,) exprimuntur

tur iiſdem litteris puncto auctis, ſic $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, & $\dot{z}$; id eſt, pro Celeritate Quantitatis u pono $\dot{u}$, & eodem pacto pro Celeritatibus aliarum Quantitatum x, y, & z ſcribam $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, reſpectivè.

His præmiſſis, ſtatim argumentum inceptum tractare pergam; & primò quidem dabo Solutionem duorum nuper propoſitorum Problematum.

PROBL. I.

Datâ Relatione, quam invicem habent Fluentes Quantitates, determinare Relationem, quæ inter earum Fluxiones intercedit.

SOLUTIO.

Æquationem, quâ data Relatio exprimitur, diſpone juxta Dimenſiones alicujus ex Fluentibus Quantitatibus, quas includit, (puta, x,), & ejus Terminos multiplica per quancumque arithmeticam Progreſſionem, & deindè per $\frac{\dot{x}}{x}$: Hanc Operationem ſeorſum perfice pro quâvis Fluenti Quantitate; Tùm fac Aggregatum ex his omnibus Factis æquale nihilo, & habebis petitam Æquationem.

EXEMPL. I.

Si Relatio inter fluentes Quantitates x, & y exponitur Æquatione $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$. Primùm diſpone Terminos ſecundùm x, deindè ſecundùm y, & eos multiplica, ut hìc vides factum.

$$\begin{array}{lllll|lll} & & & & & & & -axx \\ \text{Mult.} & x^3 & -axx & +axy & -y^3. & -y^3 & +axy & +x^3. \\ \text{Per} & \frac{3\dot{x}}{x}; & \frac{2\dot{x}}{x}; & \frac{\dot{x}}{x}; & 0. & \frac{3\dot{y}}{y}; & \frac{\dot{y}}{y}; & 0 \\ \hline \end{array}$$

Undè conficitur $3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} * - 3yy\dot{y} + ax\dot{y}$ *

Aggre-

Aggregatum ex Productis eſt $3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} - 3yy\dot{y} + ax\dot{y} = 0$; Quæ Æquatio monſtrat quænam Relatio ſit inter Fluxiones $\dot{x}$, & $\dot{y}$; nam, ſi aſſumas x ad libitum, Æquatio, $x^3 + axy - axx - y^3 = 0$, dabit y, quo determinato habebis $\dot{x} : \dot{y} :: 3yy - ax : 3xx - 2ax + ay$.

Exempl. II.

Relatio Quantitatum x, y, & z, exprimatur Æquatione $2y^3 + xxy - 2cyz + 3yzz - z^3 = 0$

Mult.	$2y^3 \begin{array}{l} +xxy \\ -2cz \\ +3zz \end{array} -z^3$	$yxx \begin{array}{l} +2y^3 \\ -2cyz \\ +3yzz \\ -z^3 \end{array}$	$-z^3 + 3yzz - 2cyz \begin{array}{l} +xxy \\ +2y^3 \end{array}$
Per	$\frac{2\dot{y}}{y}$; 0; $-\frac{\dot{y}}{y}$	$\frac{2\dot{x}}{x}$; 0	$\frac{3\dot{z}}{z}$; $\frac{2\dot{z}}{z}$; $\frac{\dot{z}}{z}$; 0
Habebis	$4yy\dot{y} * + \frac{z^3\dot{y}}{y}$	$2yx\dot{x}$ $*$	$-3zz\dot{z} + 6yz\dot{z} - 2cy\dot{z}$ $*$

Quapropter Relatio, quæ eſt inter Fluentium Celeritates aut Fluxiones $\dot{x}$, $\dot{y}$, & $\dot{z}$ exponitur per $4yy\dot{y} + \frac{z^3\dot{y}}{y} + 2yx\dot{x} - 3zz\dot{z} + 6yz\dot{z} - 2cy\dot{z} = 0$.

Cùm autem in hoc ſecundo Exemplo tres ſint fluentes Quantitates x, y, & z, habeatur, oportet, altera Æquatio, quá prorſus determinari poſſit Relatio inter Fluentes x, y, & z, earúmque Fluxiones. Suppone, *ex. gr.*, quòd $x + y - z = 0$, hinc invenietur, per hanc Regulam, altera Relatio inter Fluxiones $\dot{x} + \dot{y} - \dot{z} = 0$: Jam iſtam cum ſuperiore Æquatione compara, exterminando aliquam ex tribus illis Quantitatibus & Fluxionibus; & indè exſurget Æquatio plenè determinans Relationem ceterarum.

Si quando propoſita Æquatio continet Fractiones complexas, aut Quantitates ſurdas, pro iis litteras aliquas aſſumo, eáſque repræſentare Quan-

Quantitates fluentes ſuppono, & procedo modo ſupra tradito: Deindè litteras aſſumtas ſupprimo & extermino, ut continuò factum videbis.

EXEMPL. III.

Relatio inter Quantitates x, & y, ſit $yy - aa - x\sqrt{aa - xx}$. Pro $x\sqrt{aa - xx}$ ſcribo z, & hinc duas habeo Æquationes $yy - aa - z = 0$, & $aaxx - x^4 - zz = 0$, quarum prima dat $2\dot{y}y - \dot{z} = 0$ ut ſupra, pro Relatione Celeritatum $\dot{y}$, & $\dot{z}$; altera verò $2aax\dot{x} - 4x^3\dot{x} - 2z\dot{z} = 0$, aut $\frac{aax\dot{x} - 2x^3\dot{x}}{z} = \dot{z}$, pro Relatione Celeritatum $\dot{x}$, & $\dot{z}$; nunc expulſâ $\dot{z}$, erit $2y\dot{y} - \frac{aax\dot{x}}{z} + \frac{2x^3\dot{x}}{z} = 0$, & reſtituendo $x\sqrt{aa - xx}$ pro z habebis $2y\dot{y} - \frac{aa\dot{x} + 2xx\dot{x}}{\sqrt{aa - xx}} = 0$ pro Relatione inter $\dot{y}$, & $\dot{x}$, quæ quærebatur.

EXEMPL. IV.

Si Æquatio $x^3 - ayy + \frac{by^3}{a + y} - xx\sqrt{ay + xx} = 0$ exponat Relationem, quæ eſt inter x, & y. Facio $\frac{by^3}{a + y} = z$, & $xx\sqrt{ay + xx} = u$, & obtineo tres Æquationes $x^3 - ayy + z - u = 0$; $az + yz - by^3 = 0$; & $ax^4y + x^6 - uu = 0$: Prima dat $3xx\dot{x} - 2ay\dot{y} + \dot{z} - \dot{u} = 0$; ſecunda $a\dot{z} + y\dot{z} + z\dot{y} - 3byy\dot{y} = 0$; ac tertia $4ayx^3\dot{x} + ax^4\dot{y} + 6x^5\dot{x} - 2u\dot{u} = 0$, pro Relationibus Velocitatum $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, & $\dot{z}$; ſed valores ipſarum $\dot{u}$, & $\dot{z}$, inventos per ſecundam ac tertiam Æquationem (nempè $\frac{3byy\dot{y} - z\dot{y}}{a + y}$

pro $\dot{z}$; & $\frac{4ax^3y\dot{x}+ax^4\dot{y}+6x^5\dot{x}}{2u}$ pro $\dot{u}$,) ſubſtitue in Æquatione primâ, & fiet $3xx\dot{x}-2ay\dot{y}+\frac{3byy\dot{y}-z\dot{y}}{a+y}-\frac{4ayx^3\dot{x}-ax^4\dot{y}-6x^5\dot{x}}{2u}=0$: Jam, pro z, & u, repone earum valores $\frac{by^3}{a+y}$, & $xx\sqrt{ay+xx}$, & habebis petitam Æquationem $3xx\dot{x}-2ay\dot{y}+\frac{3abyy\dot{y}}{aa+2ay+yy}+\frac{2by^3\dot{y}}{aa+2ay+yy}-\frac{4ayx\dot{x}-6x^3\dot{x}-axx\dot{y}}{2\sqrt{ay+xx}}$, quæ exprimet Relationem inter Velocitates $\dot{x}$ & $\dot{y}$.

Hinc, puto, manifeſtum eſt quomodo peragi poſſit Operatio in aliis caſibus, ut, cùm Æquatio propoſita implicatur ſurdis Denominatoribus, cubicis Radicalibus, Radicalibus intra Radicales ut $\sqrt{ax+\sqrt{aa-xx}}$, aut quibuſvis aliis complexis Terminis ejuſdem generis.

Quinimò, etiamſi propoſita Æquatio involvat Quantitates, quæ determinari & exprimi geometricè nequeunt, quales ſunt Areæ curvilineæ, aut Curvarum Longitudines, inveniri tamen poteſt Relatio, quæ eſt inter earum Fluxiones, ut ſequens Exemplum demonſtrabit.

PRÆPARATIO IN

EXEMPLUM V.

TAB. I. Sit (*Fig.* 3.) BD Ordinata ad rectos Angulos ipſi AB; & ADH ſit Curva, cujus natura definitur Relatione, quæ eſt inter AB, & BD, & Æquatione exprimitur. Vocentur AB quidem x, & Area Curvæ ABD ad Unitatem applicata z; Jam, ad rectos Angulos educ AC æqualem Unitati; & per C age CE parallelam ad AB, & ſecantem BD in E. Nunc intellige ambas haſce ſuperficies ADB, & ACEB, generari motu Rectæ BED, patet quòd earum Fluxiones, (Fluxiones nempe Quantitatum $1\times z$, & $1\times x$, aut Quantitatum z, &

z, & x,) ſunt inter ſe ut Rectæ generantes BD, & BE; quocirca $\dot z : \dot x :: BD : BE$, aut 1; & idcircò $\dot z = \dot x \times BD$.

Hinc apparet, quòd z inveníri poteſt in Æquatione exprimente Relationem inter x & aliam fluentem Quantitatem y, & tamen Relatio Fluxionum $\dot x$ & $\dot y$ poteſt quomodocunque innoteſcere.

Exempl. V.

Proponatur, *ex. gr.*, Æquatio $zz + axz - y^4 = 0$, quæ exprimat Relationem inter x, & y; ac ſit $\sqrt{ax - xx} = BD$, undè Curva determinetur, quæ idcirco erit Circulus; Æquatio $zz + axz - y^4 = 0$, dabit ex ſupra traditis $2z\dot z + ax\dot z + az\dot x - 4y^3\dot y = 0$ pro Relatione Celeritatum $\dot x$, $\dot y$, & $\dot z$: Igitur, quia $\dot z = \dot x \times BD$ aut $= \dot x\sqrt{ax - xx}$, pro $\dot z$ pone hunc valorem, & inde conficietur hæc Æquatio $\overline{2z\dot x + ax\dot x} \times \sqrt{ax - xx} + az\dot x - 4y^3\dot y = 0$, quæ determinat Relationem Celeritatum $\dot x$, & $\dot y$.

SOLUTIONIS
DEMONSTRATIO.

Fluentium Quantitatum Momenta, (videlicet earum partes indefinitè parvæ, quarum acceſſione in indefinitè exiguis partibus Temporis Quantitates ipſæ jugitèr augentur,) ſunt ut Velocitates, quibus fluunt aut creſcunt.

Quapropter, ſi Momentum alicujus, (puta, x) repræſentatur Facto ex ejus Celeritate $\dot x$ in Quantitatem indefinitè parvam, (id eſt, $\dot x o$,) Momentum aliarum u, y, z repræſentandum erit per $\dot u o$, $\dot y o$, $\dot z o$, quia $\dot u o$, $\dot x o$, $\dot y o$, & $\dot z o$, invicem habent eandem Rationem, quam $\dot u$, $\dot x$, $\dot y$, & $\dot z$.

Jam, quia Momenta, *ex. gr.*, $\dot x o$, & $\dot y o$, ſunt Incrementa indefinitè

definitè parva, quibus fluentes Quantitates x, & y, augentur per indefinitè parva Temporis intervalla, ex eo ſequitur has Quantitates x, & y, poſt indefinitè parva Temporis ſpatia evaſiſſe $x+\dot{x}o$, & $y+\dot{y}o$. Æquatio verò, quæ quibuſcumque Temporibus indiſcriminatim exprimit Relationem fluentium Quantitatum, æquè bene exprimet Relationem, quæ intercedit inter $x+\dot{x}o$, & $y+\dot{y}o$, ac eam, quæ eſt inter x, & y, ita ut in eâdem Æquatione ponere liceat $x+\dot{x}o$, & $y+\dot{y}o$, pro x, & y.

Quamobrem, ſit Æquatio $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$, in eâ ſubſtitue $x+\dot{x}o$, & $y+\dot{y}o$, ipſis x, & y, obtinebis.

$$\left.\begin{aligned} & x^3 + 3xx\dot{x}o + 3x\dot{x}o\dot{x}o + \dot{x}^3o^3 \\ & - axx - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}o\dot{x}o \\ & + axy + ay\dot{x}o + a\dot{x}o\dot{y}o \\ & \quad + ax\dot{y}o \\ & - y^3 - 3yy\dot{y}o - 3y\dot{y}o\dot{y}o - \dot{y}^3o^3 \end{aligned}\right\} = 0$$

Sed, per hypotheſim, eſt $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$, expunge igitur hos Terminos, ceteróſque divide per o & reſtabit $3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3yy\dot{y} + 3x\dot{x}\dot{x}o - a\dot{x}\dot{x}o + a\dot{x}\dot{y}o - 3y\dot{y}\dot{y}o + \dot{x}^3oo - \dot{y}^3oo = 0$: Cùm autem finxerimus o Quantitatem infinitè parvam, ut exponere poſſet Quantitatum Momenta, Termini in eam ducti pro nihilo poſſunt haberi cum aliis collati; eos igitur negligo, & ſupereſt $3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3yy\dot{y} = 0$, ut antea inveneramus in Exemplo I.

Hic obſervandum venit, quòd ſemper evaneſcunt, cùm Termini qui per o multiplicati non ſunt, tùm ii qui multiplicati ſunt per o, duarum aut plurium Dimenſionum; & quòd reliqui Termini diviſi per o, ſemper acquirunt formam, quam habere debebant ſecundùm Regulam ſuperiorem. Quòd erat oſtendendum.

His.

His autem demonſtratis, facilè ſequentur reliqua, quæ complectitur Regula, ut, quòd Æquatio eadem complecti poteſt plures fluentes Quantitates, & quòd Termini duci poſſunt non ſolùm in Indices fluentium Quantitatum, ſed etiam in quamcunque aliam Progreſſionem arithmeticam, ita ut in Operatione eadem ſit differentia Terminorum juxta ſingulas fluentes Quantitates, & Progreſſio diſponatur ſecundùm ordinem Dimenſionum uniuſcujuſque Fluentis. His conceſſis, quæ præterea docentur in Exemplis III., IV., & V., ſatìs per ſemet ipſa patebunt.

PROBL. II.

Datâ Æquatione, quæ contineat Quantitatum Fluxiones, invenire quam Relationem habeant inter ſe hæ Quantitates Fluentes.

SOLUTIO PECULIARIS.

Cùm hoc Problema ſit ſuperioris converſum, reſolvi debet per Operationes contrarias; ſcilicet, Termini ducti in $\dot{x}$ diſponi debent juxta Dimenſiones x, & dividi per $\frac{\dot{x}}{x}$, & deindè per Numeros Dimenſionum eorum, aut fortaſſe per aliquam aliam Progreſſionem arithmeticam: Tùm, eâdem operâ repetitâ pro Terminis multiplicatis per $\dot{u}$, $\dot{y}$, vel $\dot{z}$, Aggregatum ſic emergens poni debet æquale nihilo, rejectis Terminis ſupervacuis.

EXEMPLUM.

Proponatur Æquatio $3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} - 3yy\dot{y} + ax\dot{y} = 0$, Operatio fiet, ut hìc vides.

Divide $3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x}$ Per $\frac{\dot{x}}{x}$	Divide $-3yy\dot{y}$ * $+ax\dot{y}$ Per $\frac{\dot{y}}{y}$
Quotiens eſt $3x^3 - 2axx + ayx$, quem divide per 3; 2; 1	Quotiens eſt $-3y^3$ * $+axy$, quem divide per 3; 2; 1
Quotiens eſt $x^3 - axx + axy$	Quotiens eſt $-y^3$ * $+axy$

Igitur Aggregatum $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$, exprimet petitam Relationem Quantitatum x, & y.

Hìc animadvertendum eſt, quòd etiamſi Terminus axy bis occurrat, illum tamen bis non adſcribo Summæ $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$, ſed alterum rejicio ut Terminum redundantem. Eodem pacto, ſi quando Terminus aliquis bis recurrit, (aut pluriès, ſi quando idem Terminus complectitur diverſas Quantitates fluentes,) ſemèl ſcribi debet in Terminorum ſummâ.

Alia, quæ fuiſſent obſervanda, permittam ſolertiæ Artificis; nam ſupervacaneum eſſet nimis diu in hoc argumento hærere: ſiquidem hoc pacto Problema non ſemper ſolvi poteſt. Unum tamen addam, videlicet, quòd ſi, poſtquam Fluentium Relationem inveneris hâc Methodo, regredi potes per Probl. I. ad propoſitam Æquationem Fluentes involventem, certò noſcis Opus eſſe rectum, aliàs non. Sic in Exemplo propoſito, ſi ex inventâ Æquatione $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$ quæro, per primum Problema, Relationem Fluxionum $\dot{x}$, & $\dot{y}$, pervenio ad propoſitam Æquationem $3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3yy\dot{y} = 0$; undè conſtat Æquationem $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$ eam eſſe quam petebamus. Sed, propoſitâ Æquatione $x\dot{x} - y\dot{x} + a\dot{y} = 0$, Methodus præſcripta præbet $\frac{1}{2}xx - yx + ay = 0$, Æquationem, quæ exponere deberet Relationem inter x, & y; ſed quæ ad hoc inepta eſt, quia hinc, per Probl. I., excuditur $x\dot{x} - y\dot{x} - x\dot{y} + a\dot{y} = 0$, quæ Æquatio differt à propoſitâ.

His autem perfunctoriè præmiſſis aggredior generalem ſolutionem.

P R Æ-

PRÆPARATIO IN SOLUTIONEM.

Principio animadvertendum eſt, quòd in propoſitâ Æquatione ſymbola Fluxionum, (ſunt enim Quantitates diverſi generis ab iis, quarum Fluxiones ſunt,) in ſingulis Terminis aſcendere debent ad æquè altas Dimenſiones: ſi quando autem res aliter ſe habet, aſſumenda pro Unitate eſt aliqua Fluxio cujuſvis fluentis Quantitatis, & per eam Termini minùs alti ſunt multiplicandi totiès quotiès opus eſt, ut ſymbola Fluxionum perveniant ad eundem Dimenſionum numerum in omnibus Terminis.

Sit, *ex. gr.*, Æquatio $\dot{x} + xx\dot{y} - axx = 0$, pro Unitate accipienda eſt Fluxio $\dot{z}$ tertiæ cujuſlibet Quantitatis fluentis z, & per eam primus Terminus $\dot{x}$ ſemèl, ultimus autem axx bis multiplicati concipiendi ſunt; ut Fluxiones in iis ad tot Dimenſiones aſcendant, ad quot in ſecundo Termino $\dot{x}\dot{y}$; non ſecus, ac ſi propoſita Æquatio deducta fuiſſet ab hâc $\dot{x}\dot{z} + \dot{x}\dot{y} - axx\dot{z}\dot{z} = 0$, fingendo $\dot{z} = 1$. Haud alitèr in Æquatione $\dot{x}y = \dot{y}y$, concipi debet $\dot{x}$ eſſe Unitatem, per quam Terminus yy multiplicandus eſt.

Jam Æquationes, quæ ſolùm duas fluentes Quantitates complectuntur, & eæ pari Dimenſionum numero ubique gaudent, ſemper ita diſponi poſſunt, ut ad unam partem ſit Ratio Fluxionum, (puta, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, aut $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$, vel $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, &c.,), & ad aliam valor hujus Rationis expreſſus ſimplici Termino algebraïco, ut $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2 + 2x - y$. Et, cùm peculiaris ſupra tradita Solutio adhiberi nequit, ſemper Æquationes hâc formâ donandæ ſunt.

Quapropter, ſi quando in Rationis hujus valore aliquis Terminus im-

implicatus eſt Denominatore complexo aut radicali Signo, aut ſi quando Ratio ipſa eſt Radix affectæ Æquationis, antequam Opus aggrediare, debes Reductionem facere, ſive per Diviſionem ſive per Radicis extractionem ſive per Æquationis affectæ Reſolutionem, ut ſupra docuimus.

Proponatur, *ex. gr.*, Æquatio $a\dot{y} - x\dot{y} - a\dot{x} + x\dot{x} - y\dot{x} = 0$, primùm per Reductionem ea fit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + \frac{y}{a-x}$, aut $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{a-x}{a-x+y}$. In prima hypotheſi, redigo Terminum $\frac{y}{a-x}$, cujus Denominator eſt compoſita Quantitas $a-x$, ad infinitam ſimplicium Terminorum Seriem $\frac{y}{a} + \frac{xy}{aa} + \frac{xxy}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4}$; &c., (quæ Reductio fit dividendo Numeratorem y per Denominatorem $a-x$,) unde excudo $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + \frac{y}{a} + \frac{xy}{aa} + \frac{xxy}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4}$; &c., cujus ope determinanda eſt Relatio inter x & y.

Eodem pacto, ſi daretur Æquatio $\dot{y}\dot{y} = \dot{x}\dot{y} + xx\dot{x}\dot{x}$, aut $\frac{\dot{y}\dot{y}}{\dot{x}\dot{x}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} + xx$, aut, per ulteriorem Reductionem, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + xx}$ extraherem quadratam Radicem Terminorum $\frac{1}{4} + xx$, & obtinerem Seriem infinitam $\frac{1}{2} + xx - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10}$; &c., quam ſi ſubſtituerem pro $\pm\sqrt{\frac{1}{4} + xx}$, haberem $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + xx - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10}$; &c., aut $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -xx + x^4 - 2x^6 + 5x^8 - 14x^{10}$; &c., prout $\sqrt{\frac{1}{4} + xx}$ additur ipſi $\frac{1}{2}$, vel ab eo ſubtrahitur.

Haud

Haud ſecus, propoſitâ Æquatione $\dot{y}^3 + ax\dot{x}\dot{x}\dot{y} + aa\dot{x}\dot{x}\dot{y} - x^3$ $\dot{x}^3 - 2a^3\dot{x}^3 = 0$, aut $\frac{\dot{y}^3}{\dot{x}^3} + ax\frac{\dot{y}}{\dot{x}} + aa\frac{\dot{y}}{\dot{x}} - x^3 - 2a^3 = 0$; extraho Radicem cubicæ Æquationis affectæ, undè fit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512aa} + \frac{509x^4}{16384a^3}$; &c., ut jam inveneramus.

Hìc autem obſervandum eſt, quòd in compoſitorum cenſum refero ſolùm Terminos illos, qui compoſiti ſunt reſpectu fluentium Quantitatum. Simplices enim reputo Quantitates, quæ compoſitæ ſunt tantùm quoad Quantitates datas; quia reduci poſſunt ad Quantitates ſimplices, ponendo eas æquales alicui datæ Quantitati. Quapropter Quantitates $\frac{ax+bx}{c}$; $\frac{x}{a+b}$; $\frac{bcc}{ax+bx}$; $\frac{b^4}{axx+bxx}$; $\sqrt{ax+bx}$; &c., mihi ſimplices ſunt, quia omnes reducere poſſum ad Quantitates ſimplices $\frac{ex}{c}$; $\frac{x}{e}$; $\frac{bcc}{ex}$; $\frac{b^4}{exx}$; $\sqrt{ex}$; (vel $e^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$,) ſupponendo $a+b=e$.

Præterea, quò faciliùs una ex fluentibus Quantitatibus ab aliâ diſtingui poſſit, Fluxionem eam, quæ in Rationis Numeratore eſt, non impropriè vocari poteſt *Relata Quantitas*; ea verò, quæ eſt in Denominatore & cui prior comparatur, *Correlata*: Quin etiam Quantitates ipſæ fluentes iiſdem reſpectivè Nominibus inſigniri poſſunt. Et, ut ſequentia meliùs intelligantur, concipere licet *Correlatam* Quantitatem eſſe Tempus, aut quamlibet aliam Quantitatem æquabiliter fluentem, per quam Tempus exponitur & menſuratur: Aliam verò, *Relatam* ſcilicet Quantitatem, eſſe ſpatium Tempore illo deſcriptum à re, vel Puncto gaudente Motu ſive accelerato ſive retardato; ac Problematis ſenſum eſſe, quòd Velocitate Motûs datâ ad quodcumque Temporis momentum, ſpatium deſcriptum per totum Tempus eſt determinandum.

Æquationes autem, quæ ad hoc Problema pertinent, ad tres Ordines revocari poſſunt.

Primus continet eas, in quibus inveniuntur duæ Quantitatum Fluxiones, & altera ſolùm ex earum Fluentibus.

Secundus illas quæ duas involvunt fluentes Quantitates, ſimùl cum earum Fluxionibus.

Tertius denique eas in quibus ſunt Fluxiones plurium quàm duarum Quantitatum.

Quibus præmiſſis, tranſeo ad ſolutionem trium horùm Problematis caſuum.

SOLUTIO CASUS I.

Statue fluentem Quantitatem, quæ unica eſt in Æquatione, eſſe *Correlatam*, & Æquatione huic hypotheſi aptatâ, (ponendo ſcilicet hinc ſolam Rationem, quam habet Fluxio alterius Quantitatis ad hujus Fluxionem, & inde valorem hujus Rationis in ſimplicibus Terminis,) multiplica valorem Rationis, quæ inter Fluxiones intercedit, per *Correlatam* Quantitatem; deindè divide ſingulos hujus valoris Terminos per numerum Dimenſionum, ad quas elevata eſt Quantitas ipſa *Correlata*, & id, quod ſic aſſequeris, æquivalet alteri fluenti Quantitati.

Sic, propoſitâ Æquatione $\dot{y}\dot{y} = \dot{x}\dot{y} + xx\dot{x}\dot{x}$, ſuppono quòd x ſit *Correlata* Quantitas, &, factâ Æquationis Reductione accomodatâ huic hypotheſi, reperio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + xx - x^4 + 2x^6$; &c. Jam multiplico valorem $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ per x, undè aſſequor $x + x^3 - x^5 + 2x^7$; &c.; quos Terminos ſingulos divido per numerum Dimenſionum, quibus afficiuntur, & inde conficitur $x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7$;&c., quam Quantitatem pono $= y$, & hâc Æquatione definietur Relatio inter x, & y. Quod petebatur.

Paritèr, ſit Æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512aa}$; &c., hinc

habebis

habebis $y = ax - \frac{xx}{8} + \frac{x^3}{192a} + \frac{131x^4}{2048aa}$; &c., Æquationem, quæ determinat Relationem ipſarum x, & y.

Item, Æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{xx} + \frac{a}{x^{\frac{1}{2}}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}$; dat $y = -\frac{1}{2xx} + \frac{1}{x} + 2ax^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$; nam, duc valorem $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ in x, fiet $+\frac{1}{xx} - \frac{1}{x} + ax^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}$, aut $x^{-2} - x^{-1} + ax^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}$; quibus Terminis diviſis per numerum Dimenſionum, orietur valor y, ille idem, quem ſupra invenimus.

Haud ſecùs, ex Æquatione $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{2bbc}{\sqrt{ay^3}} + \frac{3yy}{a+b} + \sqrt{by+cy}$, aſſequor $x = -\frac{4bbc}{\sqrt{ay}} + \frac{y^3}{a+b} + \frac{2}{3}\sqrt{by^3+cy^3}$; quia valor ipſius $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ multiplicatus per y, gignit $\frac{2bbc}{\sqrt{ay}} + \frac{3y^3}{a+b} + \sqrt{by^3+cy^3}$, aut $2bbca^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{a+b}y^3 + \sqrt{b+c} \times y^{\frac{3}{2}}$; undè conficitur valor x, dividendo per numerum Dimenſionum cujuſque Termini.

Eodem pacto $\frac{\dot{y}}{\dot{z}} = z^{\frac{2}{3}}$ dat $y = \frac{3}{5}z^{\frac{5}{3}}$; & $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{ab}{cx^{\frac{1}{3}}}$ præbet $y = \frac{3abx^{\frac{2}{3}}}{2c}$. Sed Æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{x}$ dat $y = \frac{a}{0}$; nam, ſi $\frac{a}{x}$ multiplicetur per x conficitur a, & ſi a dividatur per numerum Dimenſionum x, videlicet per 0, habetur $\frac{a}{0}$, quæ Quantitas infinita debet eſſe valor y.

Quapropter, ſi quando Terminus huic ſimilis occurrit in valore

 ipſius

ipſius $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, id eſt, Fractio, cujus Denominator involvit *Correlatam* Quantitatem unius Dimenſionis, ipſi *Correlatæ* Quantitati ſubſtitue aggregatum ex eâ & quâcumque datâ ad libitum aſſumendâ, vel earum differentiam: Hoc enim pacto ſervabitur in Æquatione ſic effictâ Relatio, quæ erat in Æquatione primò propoſitâ, & infinita *Relata* Quantitas minuetur infinitâ ſuimet parte, & finita fiet, expreſſa tamen Terminis numero infinitis.

Quocirca, propoſitâ Æquatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{x}$; ſi pro x ſcribis $b+x$, Quantitate b ad libitum áſſumptâ, reperies $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{b+x}$, & per Diviſionem $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{b} - \frac{ax}{bb} + \frac{axx}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4}$; &c. Nunc autem Regula nuper tradita dat $y = \frac{ax}{b} - \frac{axx}{2bb} + \frac{ax^3}{3b^3} - \frac{ax^4}{4b^4}$; &c., ad exponendam Relationem, quæ eſt inter x, & y.

Itidem, ſi habeas Æquationem $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2}{x} + 3 - xx$, ſi, (quia adeſt Terminus $\frac{2}{x}$,) ſcribas $1+x$ pro x, orietur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2}{1+x} + 2 - 2x - xx$. Jam, reducendo $\frac{2}{1+x}$ in infinitam Seriem $2 - 2x + 2xx - 2x^3 + 2x^4$; &c., conſequeris $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 4 - 4x + xx - 2x^3 + 2x^4$; &c.; &, juxta Regulam, $y = 4x - 2xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{5}x^5$; &c., pro Relatione x, & y.

Eâdem ratione, propoſitâ Æquatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{5}{2}}$,

quia

quia in eâ video Terminum x^{-1}, (vel $\frac{1}{x}$,) tranſmuto x ponendo $1 - x$ pro eo, undè fit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1-x} - \sqrt{1-x}$. Jam verò Terminus $\frac{1}{1-x}$ producit $1 + x + xx + x^3$; &c., ac Terminus $\sqrt{1-x}$ æquivalet $1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}xx - \frac{1}{16}x^3$; &c., & idcirco $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, aut $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}xx - \frac{1}{16}x^3;\ \&c.}$, idem eſt ac $1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}xx + \frac{5}{8}x^3$; &c. : His ergo valoribus ſubſtitutis, obtinebis $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + 2x + \frac{3}{2}xx + \frac{27}{16}x^3$; &c., ac, per Regulam, $y = x + xx + \frac{1}{2}x^3 + \frac{27}{64}x^4$; &c.; atque ita pòrrò.

Quin etiam in aliis caſibus, aliquando concinniori formâ donantur Æquationes, ſimili fluentis Quantitatis tranſmutatione; ut, ſi proponeretur Æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{ccx}{c^3 - 3ccx + 3cxx - x^3}$, pro x ſcribo $c - x$, & aſſequor $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{c^3 - ccx}{x^3}$, aut $\frac{c^3}{x^3} - \frac{cc}{xx}$, & hinc, per Regulam, $y = -\frac{c^3}{2xx} + \frac{cc}{x}$; ſed harum tranſmutationum uſus magis patebit ex ſequentibus.

SOLUTIO CASUS II.

PRÆPARATIO.

Hactenus de Æquationibus, quæ unam involvunt Fluentem: Sed quando ambæ apparent in Æquatione, Æquatio illa primùm reducenda eſt ad præſcriptam formam, ponendo hinc Fluxionum Rationem,

Digitized by Google

tionem, inde Aggregatum ex ſimplicibus Terminis, cui Fluxionum Ratio æqualis eſt.

Et, præterea, ſi quis Æquationis ita reductæ Terminus eſt Fractio denominata à Quantitate fluente, hic liberari debet à tali Denominatore per ſupra memoratam fluentis Quantitatis tranſmutationem.

Hoc pacto, propoſitâ Æquatione $ax\dot{y} - xy\dot{x} - aa\dot{x} = 0$, vel $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y}{a} + \frac{a}{x}$, ob Terminum $\frac{a}{x}$ aſſumo b ad libitum, & pro x ſcribo $b + x$ ſive $b - x$, aut $x - b$: ſi ſcriberem $b + x$, fieret $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y}{a} + \frac{a}{b+x}$. Tunc autem Termino $\frac{a}{b+x}$ in Seriem infinitam per Diviſionem diducto, aſſequerer $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y}{a} + \frac{a}{b} - \frac{ax}{bb} + \frac{axx}{b^3} - \frac{ax^4}{b^4}$; &c.

Haud aliter, Æquatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 3y - 2x + \frac{x}{y} - \frac{2y}{xx}$ propoſitâ, ſi propter Terminos $\frac{x}{y}$ & $\frac{2y}{xx}$ ſcriberem $1 - y$ pro y; & $1 - x$ pro x, orietur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3y + 2x + \frac{1-x}{1-y} + \frac{2y-2}{1-2x+xx}$. Atqui Terminus $\frac{1-x}{1-y}$, per Diviſionem in infinitum, dat $1 - x + y - xy + yy - xyy + y^3 - xy^3$; &c., ac Terminus $\frac{2y-2}{1-2x+xx}$, per ſimilem Diviſionem, præbet $2y - 2 + 4xy - 4x + 6xxy - 6xx + 8x^3y - 8x^3 + 10x^4y - 10x^4$; &c.: Igitur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -3x + 3xy + yy - xyy + y^3 - xy^3$; &c., $+ 6xxy - 6xx + 8x^3y - 8x^3 + 10x^4y - 10x^4$; &c.

REGU-

R E G U L A.

Æquatione ſic præparatâ, (quatenus opus eſt,) diſpone Terminos juxta Dimenſiones fluentium Quantitatum, primò ponens eos, qui *Relatâ* Quantitate non ſunt affecti, deindè eos, qui minimâ ejus Dimenſione ſunt implicati, & ſic deinceps. Eodem pacto in ſingulos ordines diſtribue Terminos juxta Dimenſiones *Correlatæ* Quantitatis, eóſque, qui primum ordinem conſtituunt, (qui nempe ſunt immunes à *Relatâ* Quantitate,) ſcribe, ita ut faciant lateralem Seriem à ſiniſtrâ dextram versùs, & reliquos, ita ut componant Seriem deſcendentem in ſiniſtrâ Columnâ, ut indicant ſubjectæ Tabellæ. Quibus ita præparatis, multiplica primum aut infimum Terminum prioris ordinis per *Correlatam* Quantitatem, & divide Productum per numerum ſuarum Dimenſionum, & quod hinc fit pone in Quotiente; erit enim primus Terminus valoris *Relatæ* Quantitatis: Tunc illum ſubſtitue in Terminis Æquationis, quæ jam poſita fuerat in ſiniſtrâ Columnâ pro *Relatâ* Quantitate, & ex Termino, qui tunc infimus erit, obtinebis ſecundum Quotientis Terminum eâdem ratione, quâ priorem aſſecutus fueras. Et hâc Operatione repetitâ Quotientem produces quòuſque volueris. Sed hoc magis perſpicuum fiet uno aut altero Exemplo.

E x e m p l. I.

Sit Æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + y + xx + xy$, cujus Terminos $1 - 3x + xx$ non affectos *Relatâ* Quantitate diſpoſitos vides in lateralem Seriem primo loco, & reliquos y & xy in ſiniſtrâ Columnâ.

	$+1 - 3x + xx$
$+y$	$* + x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5$; &c.
$+xy$	$* \quad x + xx - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{30}x^6$; &c.
Aggreg.	$+1 - 2x + xx - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{30}x^5$; &c.
$y =$	$+x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6$; &c.

Nunc

Nunc priùs multiplico primum Terminum 1 in *Correlatam* Quantitatem x, undè conficitur x, quam Quantitatem diviſam per Dimenſionum numerum 1 colloco in Quotiente inferiùs ſcripto. Deindè, ſubſtituendo hunc Terminum pro y in Terminis margini appoſitis $+y$, & $+xy$, reperio $+x$, & $+xx$, quos ſcribo è conſpectu ipſorum $+y$, & $+xy$, dextram verſùs. Jam è reliquis ſegrego Terminos infimos $-3x$, & $+x$ quorum ſumma $-2x$ ducta in x evadit $-2xx$, & diviſa per Dimenſionum numerum 2 fit $-xx$, & hic Terminus ſecundus eſt valoris y Quotienti adſcribendus. Poſtea ſumo pariter hunc Terminum ad perficiendum valorem marginalium Terminorum $+y$, & $+xy$, undè aſſequor $-xx$, & $-x^3$, Terminos addendos ipſis $+x$, & $+xx$ jam adſcriptis. Quo facto, rurſus excerpo Terminos, qui nunc ſunt infimi $+xx$, $-xx$, & $+xx$, quos in unum $+xx$ colligo, & indè educo $+\frac{1}{3}x^3$, (agendo ut antea,) tertium Terminum addendum valori ipſius y. Iterùm, poſito hoc Termino $+\frac{1}{3}x^3$ in Terminorum marginalium valore, ex Terminis jam infimis $+\frac{1}{3}x^3$. & $-x^3$ ſimùl additis obtineo $-\frac{1}{6}x^4$ pro quarto Termino valoris y. Et ſic in infinitum.

EXEMPL. II.

Eodem pacto, ſi determinanda foret Relatio x, & y, ex Æquatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + \frac{y}{a} + \frac{xy}{aa} + \frac{xxy}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4}$; &c., quæ Series ſupponitur progredi in infinitum, pono 1 in altiſſimo loco, & Terminos reliquos in ſiniſtrâ Columnâ, & perſequor Opus ut videtur in appoſito Diagrammate.

	$+1.$
$+\frac{y}{a}$	$* + \frac{x}{a} + \frac{xx}{2aa} + \frac{x^3}{2a^3} + \frac{x^4}{2a^4} + \frac{x^5}{2a^5}$; &c.
$+\frac{xy}{aa}$	$* \quad * + \frac{xx}{aa} + \frac{x^3}{2a^3} + \frac{x^4}{2a^4} + \frac{x^5}{2a^5}$; &c.
$+\frac{xxy}{a^3}$	$* \quad * \quad * + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{2a^4} + \frac{x^5}{2a^5}$; &c.
$+\frac{x^3y}{a^4}$	$* \quad * \quad * \quad * + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^5}{2a^5}$; &c.
$+\frac{x^4y}{a^5}$	$* \quad * \quad * \quad * \quad * + \frac{x^5}{a^5}$; &c.
&c.	
Aggregat.	$1 + \frac{x}{a} + \frac{3xx}{2aa} + \frac{2x^3}{a^3} + \frac{5x^4}{2a^4} + \frac{3x^5}{a^5}$; &c.
$y =$	$x + \frac{xx}{2a} + \frac{x^3}{2aa} + \frac{x^4}{2a^3} + \frac{x^5}{2a^4} + \frac{x^6}{2a^5}$; &c.

Propoſitum, puta, mihi fuerat extrahere valorem ipſius y tantùm uſque ad ſextam Dimenſionem x; eâ de cauſâ inter operandum omitto omnes eos Terminos, quos ad rem non facturos prævideo, ut indicatur ſigno &c., quod ſubjunxi Seriebus interciſis.

EXEMPL. III.

Haud aliter, ſi proponeretur Æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -3x + 3xy + yy - xyy + y^3 - xy^3 + y^4 - xy^4$; &c. $+ 6xxy - 6xx + 8x^3y - 8x^3 + 10x^4y - 10x^4$; &c., &, ſi producenda eſſet extractio valoris ipſius y, donec x ad ſeptimam Dimenſionem aſcenderet, Terminos ordine diſponerem, ut factum eſt in ſubjectâ Tabellâ, & Opus inſtituerem more ſolito, niſi quod, quia in ſiniſtrâ Columnâ y invenitur non ſolùm unius ſed duarum Dimenſionum vel *trium* (vel etiam pluſquàm trium, ſi quis producere vellet valorem y ultra ſeptimam Dimenſionem ipſius x,) ſubdo ſecundam & ter-

tiam Poteſtatem y gradatim protractas, quòuſque opus eſt, ut eæ, poſtquam poſitæ fuerint gradatim dexteram verſùs pro marginalium valore, ſaltem dent Terminos tot Dimenſionum, quot ad Operationem ſequentem requiri perſpicio.

	$-3x-6xx-8x^3-10x^4-12x^5-14x^6$; &c.
$+3xy$	* * $-\frac{9}{2}x^3-6x^4-\frac{75}{8}x^5-\frac{273}{20}x^6$; &c.
$+6xxy$	* * * $-9x^4-12x^5-\frac{75}{4}x^6$; &c.
$+8x^3y$	* * * * $-12x^5-16x^6$; &c.
$+10x^4y$	* * * * * $-15x^6$; &c.
&c.	
$+yy$	* * * $+\frac{9}{4}x^4+6x^5+\frac{107}{8}x^6$; &c.
$-xyy$	* * * * $-\frac{9}{4}x^5-6x^6$; &c.
&c.	
$+y^3$	* * * * * $-\frac{27}{8}x^6$; &c.
Aggregat.	$-3x-6xx-\frac{25}{2}x^3-\frac{91}{4}x^4-\frac{333}{8}x^5-\frac{367}{5}x^6$; &c.
$y=-\frac{3}{2}xx-2x^3-\frac{25}{8}x^4-\frac{91}{20}x^5-\frac{111}{16}x^6-\frac{367}{35}x^7$; &c.	
$yy=+\frac{9}{4}x^4+6x^5+\frac{107}{8}x^6$; &c.	
$y^3=-\frac{27}{8}x^6$; &c.	

Et hâc Methodo reperio demum $y=-\frac{3}{2}xx-$; &c. quæ eſt Æquatio petita: Sed, quia valor hic negativus eſt, apparet, quòd una

una ex Quantitatibus x, & y, decreſcit cùm altera creſcit. Idem dicendum eſt, quando una ex Fluxionibus affirmativa eſt, altera verò negativa.

EXEMPL. IV.

Eàdem ratione poteſt Æquatio reſolvi, etiamſi Relata Quantitas affecta ſit Dimenſionibus fractis: Ut, ſi proponeretur indagandus valor x ex Æquatione $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{1}{2}y - 4yy + 2yx^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{5}xx + 7y^{\frac{5}{2}} + 2y^{3}$, in quà eſt Terminus $2yx^{\frac{1}{2}}$, (aut $2y\sqrt{x}$,) affectus fractà Dimenſione $\frac{1}{2}$.

	$+\frac{1}{2}y \ast - 4yy + 7y^{\frac{5}{2}} + 2y^{3}$
$+ 2yx^{\frac{1}{2}}$ $-\frac{4}{5}xx$	$\ast \quad \ast + yy \quad \ast - 2y^{3} + 4y^{\frac{7}{2}} - 2y^{4}$; &c. $\ast \quad \ast \quad \ast \quad \ast \quad \ast \quad \ast - \frac{1}{20}y^{4}$; &c.
Aggreg.	$+\frac{1}{2}y \ast - 3yy + 7y^{\frac{5}{2}} \ast + 4y^{\frac{7}{2}} - \frac{41}{20}y^{4}$; &c.
$x = +\frac{1}{4}yy - y^{3} + 2y^{\frac{7}{2}} \ast + \frac{8}{9}y^{\frac{9}{2}} + \frac{41}{100}y^{5}$; &c. $x^{\frac{1}{2}} = +\frac{1}{2}y - yy + 2y^{\frac{5}{2}} - y^{3}$; &c. $xx = +\frac{1}{16}y^{4}$; &c.	

Ex valore ipſius x gradatim deduco valorem $x^{\frac{1}{2}}$, (quod fit extrahendo Radicem quadratam,) ut videre potes in inferiore Diagrammatis parte, qui valor gradatim transferri & inſeri poteſt in valore marginalis Termini $2yx^{\frac{1}{2}}$. Et hoc pacto tandem habebo Æquationem $x = \frac{1}{4}yy - y^{3} + 2y^{\frac{7}{2}} + \frac{8}{9}y^{\frac{9}{2}} - \frac{41}{100}y^{5}$; &c., quà x relativè ad y indefinitè exprimitur. Et ſic rem peragere potes in ceteris caſibus quibuſlibet.

Suprà aſſerui, quòd hæ Solutiones perfici poſſunt infinitis modis. Hoc facies aſſumendo ad libitum non ſolùm primam Quantitatem prioris Seriei, ſed quamcumque aliam Quantitatem pro primo Quotientis Termino, & deindè procedendo ut antea. Sic, ſi in priori ex præcedentibus Exemplis, accipis 1 tanquam primum Terminum valoris y, & ſubſtituis 1 pro y in marginalibus Terminis $+y$, & $+xy$, ac proſequeris Operationem ut priùs, (cujus rei tentamen hìc attuli,) orietur alter valor y, nem-

	$+1 - 3x + xx$
$+y$	$+1 + 2x \quad * + x^3 + \frac{1}{4}x^4$; &c.
$+xy$	$* + x + 2xx \quad * + x^4$; &c.
Aggreg.	$+2 \quad * + 3xx + x^3 + \frac{5}{4}x^4$; &c.
$y = 1 + 2x \quad * + x^3 \mp \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5$; &c.	

pe $1 + 2x + x^3 + \frac{1}{4}x^4$; &c. Item alter & alter orietur ex hypotheſi, quòd 2, vel 3, aut quivis alius Numerus ſit primus Quotientis Terminus: Vel, ſi aliquod ſymbolum, (puta, a,) adhibes ad repræſentandum indeterminatè primum Terminum, eàdem Operatione, (quam hìc appoſui,) invenies $y = a + x + ax - xx + axx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}ax^3$; &c., in quâ pro a pone 1, 2, 0, $\frac{1}{2}$, aut quemcumque Numerum, aſſecuturus infinitis modis Relationem inter x, & y.

$+1$

.	$+1 - 3x + xx$
$+y$	$+a + x - xx + \frac{1}{3}x^3$; &c. $+ax + axx + \frac{2}{3}ax^3$; &c.
$+xy$	$* + ax + xx - x^3$; &c. $+axx + ax^3$; &c.
Aggreg.	$+1 - 2x + xx - \frac{2}{3}x^3$; &c. $+a + 2ax + 2axx + \frac{5}{3}ax^3$; &c.
	$y = a + x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4$; &c. $+ax + axx + \frac{2}{3}ax^3 + \frac{5}{12}ax^4$; &c.

Obſervandum eſt, quòd, quando Quantitas extrahenda afficitur fractâ Dimenſione, (ut in quarto ex ſuperioribus Exemplis,) benè ſumetur Unitas, vel quivis alius commodus Numerus pro primo Termino; Et hoc quidem neceſſariò faciendum eſt, quando ad obtinendum valorem hujus fractæ Dimenſionis, Radix aliter extrahi nequit ob negativum ſignum; & etiam, quando nulli ſunt Termini, qui diſponi poſſint in primâ vel capitali Serie, unde primus hic Terminus deducitur.

Sic demum ad finem perduxi hoc valde intricatum & omnium aliorum difficillimum Problema, quando duæ ſolùm ſunt fluentes Quantitates unà cum Fluxionibus ſuis in propoſitâ Æquatione. Sed, præter generalem hanc Methodum, quæ ſe extendit ad omnes difficultates, aliæ ſunt plerumque breviores, quibus Opus facilius ſæpè reddi poteſt, & Lectori rem non injucundam faciam, ſiquod earum ſpecimen hìc ex abundanti referam.

I.

Cùm Quantitas reſolvenda habet alicubi negativas Dimenſiones, omninò neceſſarium non eſt priùs Æquationem aliâ formâ donare. Proponatur, *ex. gr.*, $\dot{y} = \frac{1}{y} - xx$, Æquatio in quâ y habet negativam Dimenſionem; eam quidem convertere poſſum in aliam formam, *ex. gr.*, ſcribendo $1 + y$ pro y; Sed citiùs expedietur Reſolutio Methodo, quam in ſuppoſitâ Tabellâ habes.

	$* \quad * - xx$
$\frac{1}{y}$	$1 - x + \frac{3}{2}xx$; &c.
Aggregat.	$1 - x + \frac{1}{2}xx$; &c.
$y = 1 + x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3$; &c.	
$\frac{1}{y} = 1 - x + \frac{3}{2}xx$; &c.	

Hìc aſſumpſi Unitatem pro primo Termino valoris y, reliquos Terminos excudi ut antea; & interim hinc eduxi per partes (dividendo) valorem ipſius $\frac{1}{y}$, quem poſui in valore Termini marginalis.

II.

Neceſſariò paritèr non requiritur, ut Dimenſiones alterius fluentis Quantitatis ſemper affirmativæ ſint. Nam, ex Æquatione $\dot{y} = 3 + 2y - \frac{yy}{x}$, ſine præſcriptâ Termini $\frac{yy}{x}$ Reductione obtineri poteſt $y = 3x - \frac{3}{2}xx + 2x^3$; &c. Et ex Æquatione $\dot{y} = -y + \frac{1}{x} - \frac{1}{xx}$, haberi poteſt $y = \frac{1}{x}$ pro valore ipſius y, ſi Operatio dirigatur juxta ſequens ſpecimen.

Digitized by Google

	$-\frac{1}{xx}+\frac{1}{x}$
$-y$	$*-\frac{1}{x}$
Aggregat.	$-\frac{1}{xx}$ 0
$y=\frac{1}{x}$	

Hìc obiter animadvertendum eſt, quòd inter infinitas Solutiones, quibus Æquatio poteſt enodari, ſæpe ſæpius aliqua eſt, quæ perducit ad finitum Quantitatis quæſitæ valorem, ut in ſuperiori Exemplo. Hæ autem Solutiones non difficulter reperiuntur, ſumpto aliquo ſymbolo pro primo Termino; nam, Solutione peractâ dari poteſt huic ſymbolo valor aliquis, qui totam Seriem finitam reddat.

L I I.

Rurſùs, ſi valor ipſius y deducendus foret ab Æquatione $\frac{y}{2x}+1-2x+\frac{1}{2}xx=\dot{y}$, illum aſſequi potes, & quidem ſatis concinnè, Termino $\frac{y}{2x}$ non reducto; modò ſupponas, (ut Analyſtæ faciunt,) datum id quod petitur. Sic, primum Terminum valoris y fingo $2ex$, & pono $2e$ eſſe numeralem Coefficientem, qui adhuc ignotus eſt; &, ſcribendo $2ex$ pro y in marginali Termino, obtineo e, quam Quantitatem pono dextram verſùs, & Aggregatum $1+e$ dabit $x+ex$ pro illo ipſo primo Termino, quem antea repræſentaveram ſymbolo $2ex$. Quapropter facio $2ex=x+ex$, & hinc deduco $e=1$; eſt igitur $2x$ primus valoris y Terminus $2ex$. Eodem pacto, fictitium Terminum $2fxx$ uſurpo ad repræſentandum ſecun-

ſecundum Terminum valoris y, unde conficitur $-\frac{2}{3}$ pro valore ipſius f, & propterea ſecundus Terminus eſt $-\frac{4}{3}xx$: Haud aliter fictitius Coefficiens g in Termino tertio dabit $\frac{1}{10}$; & h in quarto præbebit o. Quocirca, cùm nullus alius Terminus ſuperſit, perſpicio peractum eſſe Opus, & valorem ipſius y eſſe accuratè $2x - \frac{4}{3}xx + \frac{1}{5}x^3$. Diagramma ſuppoſitum totam Operationem tibi ſiſtit.

	$1 - 2x + \frac{1}{2}xx$
$\frac{\dot{y}}{2x}$	$e + fx + gxx + hx^3$
Aggregatum	$+1 - 2x + \frac{1}{2}xx$ $+e + fx + gxx + hx^3$
Per hypotheſim	
	$y = 2ex + 2fxx + 2gx^3 + 2hx^4$
Per conſequens	
	$y = +x - xx + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}hx^4$ $+ex + \frac{1}{2}fxx + \frac{1}{3}gx^3$
Re ipſâ	$y = 2x - \frac{4}{3}xx + \frac{1}{5}x^3$

Eodem pacto, ſi haberes $\dot{y} = \frac{3y}{4x}$, pone $y = ex^s$, ubi e denotat Coefficientem incognitum & s numerum Dimenſionum itidem incognitum. Subſtituendo ex^s pro y fiet $\dot{y} = \frac{3ex^{s-1}}{4}$, & hinc rurſus $y = \frac{3ex^s}{4s}$. Confer hos duos valores ipſius y, & invenies $\frac{3e}{4s} = e$; quocirca

quocirca $s = \frac{3}{4}$, & e eſt indefinita; igitur, aſſumptâ e ad libitum, habebis $y = e x^{\frac{3}{4}}$.

I V.

Potes aliquando etiam Operationem incipere ab altiore Quantitatis æquabilis Dimenſione, & gradatim deſcendere ad Poteſtates inferiores. Ut, ſi daretur Æquatio $\dot{y} = \frac{y}{xx} + \frac{1}{xx} + 3 + 2x - \frac{4}{x}$, velles autem incipere ab altiſſimo Termino $2x$, diſponens Seriem capitalem ordine contrario illi, quem hactenus ſervavimus; hinc demum excuderes $y = xx + 4x - \frac{1}{x}$; &c., juxta modum procedendi hìc appoſitum.

	$+2x+3-\frac{4}{x}+\frac{1}{xx}$
$+\frac{y}{xx}$	$* + 1 + \frac{4}{x} \quad * - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^4}$; &c.
Aggreg.	$+2x + 4 \quad * + \frac{1}{xx} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^4}$; &c.
	$y = xx + 4x \quad * - \frac{1}{xx} + \frac{1}{2xx} - \frac{1}{6x^3}$; &c.

Obiter obſerva, quòd in Operationis progreſſu, poteram inſeruiſſe quamcumque datam Quantitatem inter Terminos $4x$, & $-\frac{1}{x}$, pro intermedio Termino qui deeſt; & ita valor ipſius y potuiſſet exhiberi modis infinitis.

V.

Si præterea Quantitas *Relata* habet aliquem Dimenſionum ſuarum fractum Indicem, revocari poteſt ad Integros, ponendo, quòd Quantitas Indice fracto affecta æqualis eſt alicui tertiæ Fluenti, & ſubſtituendo pro *Relatâ* Quantitate & ejus Fluxionibus Quantitatem eductam ex Æquatione fictitiâ, ejúſque Fluxiones.

Propoſita ſit, *ex. gr.*, Æquatio $\dot{y} = 3xy^{\frac{2}{3}} + y$, in quâ fracto Indice $\frac{2}{3}$ afficitur Quantitas *Relata*; ſumptâ ad libitum Fluente aliquâ z, ſuppone $y^{\frac{1}{3}} = z$, vel $y = z^3$; Relatio Fluxionum, per Probl. I., erit $\dot{y} = 3zz\dot{z}$: Quapropter ſcribe $3zz\dot{z}$ pro $\dot{y}$, & z^3 pro y, & zz pro $y^{\frac{2}{3}}$, hinc habiturus $3zz\dot{z} = 3xzz + z^3$ aut $\dot{z} = x + \frac{1}{3}z$, ubi z fungitur officio *Relatæ* Quantitatis. Jam, extracto valore ipſius z, puta, $z = \frac{1}{2}xx + \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{216} + \frac{x^5}{3240}$; &c., reſtitue $y^{\frac{1}{3}}$ pro z, & obtinebis petitam Relationem inter x, & y, videlicet $y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}xx + \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{216}x^4$; &c., vel, omnia elevando ad tertiam Poteſtatem, $y = \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{24}x^7 + \frac{1}{288}x^8$; &c.

Item, ſi daretur Æquatio $\dot{y} = \sqrt{4y} + \sqrt{xy}$, vel $\dot{y} = 2y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$, facio $z = y^{\frac{1}{2}}$, ſive $zz = y$, & hinc, per Probl. I., duco $2z\dot{z} = \dot{y}$; quapropter $2z\dot{z} = 2z + zx^{\frac{1}{2}}$, aut $\dot{z} = 1 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$; ergo, per priorem hujus Problematis Caſum, eſt $z = x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$, ſive $y^{\frac{1}{2}} = x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$, & quadrando, $y = xx + \frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9}x^3$. Sed, ſi vis valorem y expreſſum infinitis modis diverſis, pone $z = c + x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$,

$+ \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}}$, aſſumendo quemvis primum Terminum c, & habebis zz (id eſt y) $= cc + 2cx + \frac{2}{3} cx^{\frac{3}{2}} + xx + \frac{2}{3} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9} x^3$. Sed fortaſſe hæc perſequens, quæ rarò uſu-venient, nimis minuta ſcrutatus videbor.

SOLUTIO CASUS III.

Statim nos extricabimus à Problemate ſolvendo, quando Æquatio continet tres vel etiam plures Quantitatum Fluxiones. Nam, ad id ſufficit quamlibet Relationem inter binas ſupponere, cùm hæc Relatio à ſtatu quæſtionis non determinatur, & hinc deduci poteſt Relatio, quæ eſt inter earum Fluxiones, ita ut exterminari poſſit alterutra cum Fluxione ſuâ. Quamobrem, ſi trium Quantitatum Fluxiones adſunt, una Æquatio aſſumenda eſt; duæ Æquationes, ſi quatuor inſunt Fluxiones; atque ita porro; ita ut Æquatio propoſita tandem in aliam transformetur, in quâ ſint duæ Fluxiones tantummodo. Tunc autem Æquatio hæc reſolvenda eſt ut ſupra, & ſic detegentur Relationes aliarum Quantitatum.

Sit propoſita Æquatio $2\dot{x} - \dot{z} + x\dot{y} = 0$: Ut obtineam Relationem Quantitatum x, y, & z, quarum Fluxiones $\dot{x}$, $\dot{y}$, & $\dot{z}$ ſunt in Æquatione hâc, fingo Relationem quamlibet inter duas ex ipſis, puta, inter x, & y, ſupponendo quòd $x = y$, aut $2y = a + z$, ſive $x = yy$; &c.: Sumamus $x = yy$, &, (quod hinc conficitur,) $\dot{x} = 2y\dot{y}$. Igitur Æquatio propoſita, ponendo $2y\dot{y}$ pro $\dot{x}$, & yy pro x, mutatur in hanc $4y\dot{y} - \dot{z} + yy\dot{y} = 0$; & hinc educitur Relatio inter y, & z, id eſt, $2yy - z + \frac{1}{3} y^3 = 0$: Reſtitue x pro yy, & $x^{\frac{3}{2}}$ pro y^3, & invenies $2x + \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} = z$. Ergo, ex infinitis modis, quibus x, y, & z, altera ad alteram, poſſunt referri, unus inventus fuit, qui exponitur per has Æquationes $x = yy$; $2yy + \frac{1}{3} y^3 = z$; & $2x + \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} = z$.

DEMONSTRATIO.

Hoc pacto ſolutum eſt Problema, ſed latet Demonſtratio. Cùm autem tot & tam varia contineat hoc Problema, ut Demonſtratio ſyntheticè ſine maximis ambagibus deduci nequeat ex genuinis ejus fundamentis, ſufficiet eam breviter indicare analyticè. Propoſitâ igitur Æquatione, & Opere peracto, tenta num ex Æquatione repertâ regredi liceat ad propoſitam, per Probl. I. Quod ubi accidit, conſtat Relationem, quæ eſt inter Quantitates in Æquatione repertâ, requirere Relationem, quæ eſt inter Fluxiones in propoſitâ; & vice verſâ. *Q. E. D.*

Sic, Æquatione propoſitâ $\dot{y}=x$, ex eâ deduceretur Æquatio $y=\frac{1}{2}xx$, & ex hâc, vice verſâ, per Probl. I., $\dot{y}=\dot{x}x$, aut $\dot{y}=x$, quia $\dot{x}$ ſumitur pro Unitate. Eodem pacto, ex $\dot{y}=1-3x+y+xx+xy$ conficitur $y=x-xx+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^5-\frac{1}{45}x^6$; &c., & rurſus hinc, per Probl. I., $\dot{y}=1-2x+xx-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4-\frac{2}{15}x^5$; &c., qui duo valores conveniunt, ut patet ſubſtituendo $x-xx+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^5$; &c., pro y in primo valore.

Sed in Æquationum Reductione adhibeo Operationem, cujus rationem afferendam cenſeo; ea conſiſtit in alicujus fluentis Quantitatis tranſmutatione per ejus connexionem cum datâ Quantitate. Sint TAB. I. (*Fig.* 4.) AE, atque *ae*, duæ Rectæ utrimque in infinitum protenſæ; per quas ferantur duæ res mobiles, aut duo Puncta, quæ eodem Tempore perveniſſe concipiantur in loca A, & *a*; B & *b*; C & *c*; D & *d*; &c., & Mobilis, quod fertur per AE, diſtantia à puncto B illius Motum ita metiatur, ut — BA, + BC, + BD, + BE ſucceſſivè, & quando Mobile eſt in locis A, C, D, E, ſint fluentes Quantitates. Pariter, ſit *b* ſimile Punctum in alterâ Lineâ: Tunc

Tunc igitur — BA, & — *ba*, erunt duæ contemporaneæ Fluentes, ut etiam + BC, & + *bc*; + BD, & + *bd*; + BE, & + *be*; &c. Jam, ſi Punctis B, & *b*, ſubſtituantur Puncta A, & *c*, ad quæ, velut quieſcentia, referantur Motus; tunc *o*, & — *ca*; + AB, & — *cb*; + AC, & *o*, + AD, & + *cd*; + AE, & + *ce*, erunt contemporaneæ fluentes Quantitates. Quocirca, mutatæ quidem ſunt fluentes Quantitates Additione & Subductione datarum Quantitatum AB, & *ac*; ſed in iis mutatæ non fuerunt neque Motuum Celeritates, neque mutua Fluxionum Relatio. Partes enim eodem Tempore genitæ AB, & *ab*; BC, & *bc*; CD, & *cd*; DE, & *de*, ſunt ejuſdem longitudinis in utrâque hypotheſi. Eodem pacto in Æquationibus has Quantitates exponentibus contemporaneæ Quantitatum partes non ideo mutantur, quia abſoluta earum magnitudo aliquâ datâ Quantitate augetur vel minuitur. Hinc patet propoſitum; etenim eò tantùm tendit Problema, ut determinentur contemporaneæ partes aut differentiæ abſolutarum Quantitatum u, x, y, aut z, deſcriptæ datâ Fluendi Ratione. Nihil autem intereſt cujuſnam abſolutæ magnitudinis ſint hæ Quantitates, dummodò earum contemporaneæ vel correſpondentes differentiæ conveniant cum propoſitâ Fluxionum Relatione.

Hujus rei ratio tradi etiam ſic algebraïcè poteſt. Propoſita ſit Æquatio $\dot{y} = yx\dot{x}$; & ſuppone $x = 1 + z$; igitur, per Probl. I., $\dot{x} = \dot{z}$; Quapropter pro $\dot{y} = yx\dot{x}$ ſcribere licet $\dot{y} = y\dot{x} + yz\dot{x}$. Nunc, quia $\dot{x} = \dot{z}$, liquet, quòd tametſi Quantitates x, & z, non ſint ejuſdem longitudinis, attamen æqualiter fluunt, reſpectivè ad y, & habent æquales unà genitas partes. Quidni igitur repræſentem eodem ſymbolo Quantitates, quarum Ratio fluendi eadem eſt, & ad determinandas earum contemporaneas differentias quidni ſcribam $\dot{y} = y\dot{x} + yx\dot{x}$, pro $\dot{y} = yx\dot{x}$.

Demum manifeſtò apparet, quomodo inveniri poſſint partes contemporaneæ ex Æquatione Fluentes involvente.

Sic adſit Æquatio $y = \frac{1}{x} + x$, &, cùm $x = 2$, fit $y = 2\frac{1}{2}$;

at, cùm $x = 3$, tunc $y = 3\frac{1}{3}$. Igitur, dum x fluit ex 2 in 3, y fluit ex $2\frac{1}{2}$ in $3\frac{1}{3}$, quapropter partes eodem Tempore deſcriptæ ſunt $3 - 2 = 1$, & $3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

His, tanquam dicendorum fundamentis ſubſtratis, ad magis peculiaria Problemata deſcendam.

PROBL. III.

Quantitatum Maxima *&* Minima *determinare.*

Cûm Quantitas eſt omnium poſſibilium *Maxima*, vel *Minima*; ea, hoc ipſo Temporis momento, nec retroverſum fluit, nec antrorſum: Nam, ſi antrorſum fluere, id eſt, creſcere poſſet, ante Fluxionem certè minor erat, quàm pôſt; & pôſt major quàm antea. Et, vice verſâ, ſi retroverſum flueret vel decreſceret. Igitur quære ejus Fluxionem, per Probl. I., & eam nihilo æqualem pone.

EXEMPL. I.

Quærendus ſit maximus Valor ipſius x in Æquatione $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$; quære Relationem Fluxionum x, & y, & invenies $3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3yy\dot{y} = 0$: Fac $\dot{x} = 0$, reſtabit $ax\dot{y} - 3yy\dot{y} = 0$ vel $3yy = ax$. Hujus ope exterminabis alterutram ex Fluentibus x, & y è primariâ Æquatione, & aliam determinabis ex Æquatione hinc proveniente; & deinde ambas per $-yy + ax = 0$.

Hoc facere non aliud eſt, quàm multiplicare Terminos Æquationis propoſitæ per Dimenſiones alterius fluentis Quantitatis y. Hinc deduci poteſt notiſſima Regula HUDDENII, quâ jubetur, ut ad inveniendam maximam vel minimam Quantitatem *Relatam*; Æquatio diſponatur juxta Dimenſiones Quantitatis *Correlatæ*, & Termini multiplicentur per aliquam arithmeticam Progreſſionem. Sed quia neque hæc Regula, nec ulla alia ex iis, quas vulgatas ſcio, ſe extendit

tendit ad Æquationes affectas ſurdis Quantitatibus, abſque prævià Reductione; idcirco ſequens dabo Exemplum ad hunc Caſum ſpectans.

EXEMPL. II.

Determinanda ſit maxima Quantitas y in Æquatione $x^3 - ayy + \frac{by^3}{a+y} - xx\sqrt{ay+xx} = 0$. Quære Fluxiones x, & y, quod dabit Æquationem $3xx\dot{x} - 2ay\dot{y} + \frac{3abyy\dot{y} + 2by^3\dot{y}}{aa+2ay+yy} - \frac{4ayx\dot{x} + 6x^3\dot{x} + axx\dot{y}}{2\sqrt{ay+xx}} = 0$. Jam, quia, per hypotheſim, $\dot{y} = 0$, omitte Terminos ductos in $\dot{y}$, (quos ad laborem minuendum omiſiſſe potuiſſes inter operandum,) & quos ſuperſtites invenies divide per $x\dot{x}$, demum habiturus $3x - \frac{2ay+3xx}{\sqrt{ay+xx}} = 0$: Hinc, Reductione factâ, aſſequeris $4ay + 3xx = 0$, cujus ope poteris exterminare alterutram ex Quantitatibus x, & y, ex propoſitâ Æquatione; & illa, quæ hinc exſurget, (erit autem cubica) dabit alterius valorem.

Ex hoc Problemate deduci poteſt Solutio ſequentium.

I.

Dato Triangulo, aut Segmento cujuſvis datæ Curvæ, inſcribere maximum Rectangulum.

II.

Ducere maximam aut minimam rectam Lineam, quæ jacere poſſit inter datum Punctum & Curvam poſitione datam. Aut, *ex dato Puncto ducere Rectam, quæ ad rectos Angulos occurrat Curvæ.*

III.

Ducere rectam Lineam maximam aut minimam earum, quæ tranſeunt per datum Punctum, & jacent inter duas alias Lineas ſive Rectas, ſive Curvas.

IV. Ex-

I V.

Ex Puncto dato in Parabolâ Rectam excitare, quæ Parabolam ſecet ſub Angulo omnium maximè obliquo. Idémque facere in aliis Curvis.

V.

Determinare Curvarum Vertices, earum maximas aut minimas latitudines, Puncta, in quibus partes gyrantes ſeſe mutuò ſecant; &c.

V I.

Invenire Puncta Curvarum, in quibus eæ maximè vel minimè curvæ ſunt.

V I I.

In datâ Ellipſi reperire minimum Angulorum, quo Ordinatæ earum Diametrum ſecent.

V I I I.

Ex omnibus Ellipſibus, quæ tranſire poſſunt per data quatuor Puncta, determinare maximam, vel eam quæ ad Circulum quàm-proximè accedit.

I X.

Determinare partem ſphæricæ Superficiei in remotiori Hemiſphærio; quam illuminare poteſt Lux progrediens è magno intervallo, & refracta ab Hemiſphærio proximiori.

Plura alia Problemata hujuſcemodi faciliùs proponi poſſunt, quàm reſolvi ob Calculi laborem.

PROBL.

PROBL. IV.

Ducere Tangentes ad Curvas.

PRIMUS MODUS.

Tangentes modis ſanè variis duci poſſunt pro variis Relationibus, quæ inter rectas Lineas & Curvas intercedunt. Et primò quidem ſit (*Fig.* 5.) BD recta Linea, vel Ordinata, faciens Angulum quemvis datum cum aliâ Rectâ AB, (quæ Baſis eſt vel Abſciſſa,) & terminata ad Curvam ED. Moveatur Ordinata per ſpatium indefinitè parvum uſque ad locum bd, ita ut ea augeatur Momento cd, cùm AB augetur Momento Bb, cui Dc æqualis eſt & parallela. Producatur Dd donec ipſi AB occurrat in T; & hæc Linea Curvam tanget in D vel d, & ſimilia erunt Triangula dcD, DBT, quapropter TB : BD :: Dc (vel Bb) : cd. TAB. I.

Cùm autem Relatio BD ad AB exprimatur Æquatione, quâ definitur Curvæ natura; hinc erue Fluxionum Relationem, per Probl. I. Deinde cape TB ad BD in eâdem Ratione, in quâ Fluxio ipſius AB eſt ad Fluxionem BD; & acta TD Curvam tanget in Puncto D.

EXEMP. I.

Si dicantur AB $= x$, & BD $= y$, earúmque Relatio exponatur per $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$; erit Fluxionum Relatio $3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ax\dot{y} + ay\dot{x} - 3yy\dot{y} = 0$; igitur $\dot{y} : \dot{x} :: 3xx - 2ax + ay : 3yy - ax ::$ BD (y) : BT. Quapropter BT $= \frac{3y^3 - axy}{3xx - 2ax + ay}$. Datur autem Punctum D; quare etiam DB, & BA, vel y, & x; ergo BT magnitudine datur, & hinc Tangens TD determinatur.

Hoc autem pacto concinnior reddi poteſt operandi Methodus. Propoſitæ Æquationis Terminos pone æquales nihilo; eos multiplica per numerum Dimenſionum Ordinatæ; &, quod hinc conficitur, pone in Numeratore; deinde multiplica Terminos ejuſdem Æquationis per numerum Dimenſionum Abſciſſæ, & Productum di-

diviſum per Abſciſſam pone in Denominatore valoris BT; tunc accipe BT versùs A, ſi ejus valor eſt affirmativus, & ad contrarias partes, ſi negativus.

Sic Æquatio $\overset{0}{\underset{3}{x^3}} - \overset{0}{\underset{2}{axx}} + \overset{1}{\underset{1}{axy}} - \overset{3}{\underset{0}{y^3}} = 0$, multiplicata per ſuperiores Numeros dat, $axy - 3y^3$ pro Numeratore, & multiplicata per inferiores Numeros ac diviſa per x præbet $3xx - 2ax + ay$ pro Denominatore valoris BT.

Pariter, Æquatio $y^3 - byy - cdy + bcd + dxy = 0$, (quæ exprimit naturam Parabolæ ſecundi generis, cujus ope Cartesius conſtruxit Æquationes ſex Dimenſionum; Vide ejus Geometriam p. 42. *Amſtel. Ed. An.* 1659,) ipſo intuitu dat $\frac{3y^3 - 2byy - cdy + dxy}{dy}$, ſive $\frac{3yy}{d} - \frac{2by}{d} - c + x = BT$.

Eâdem quoque ratione $aa - \frac{r}{q}xx - yy = 0$, (quæ pertinet ad Ellipſim, cujus centrum eſt A) præbet $\frac{-2yy}{-\frac{2r}{q}x}$, aut $\frac{qyy}{rx} = BT$; & ſic de ceteris.

Notare potes, quòd nihil intereſt quînam ſit Angulus, quem Ordinatæ faciunt cum Abſciſſâ.

Sed Regula hæc ſe non extendit, neque ad Æquationes affectas Quantitatibus ſurdis, neque ad Curvas mechanicas; tunc autem confugiendum eſt ad Methodum, quâ hæc, tanquam fundamento, innititur.

Exempl. II.

Sit Æquatio $x^3 - ayy + \frac{by^3}{a+y} - xx\sqrt{ay+xx} = 0$, exponens Relationem, quæ eſt inter AB, & BD, erítque, per Probl. I., Relatio Fluxionum $3x\dot{x}x - 2a\dot{y}y + \frac{3ab\dot{y}yy + 2by^3\dot{y}}{aa + 2ay + yy} - \frac{4a\dot{y}xx - 6x^3\dot{x} - ax\dot{x}y}{2\sqrt{ay+xx}} = 0$;

quam-

quamobrem erit $3xx - \frac{4ayx - 6x^3}{2\sqrt{ay+xx}} : 2ay - \frac{3abyy - 2by^3}{aa+2ay+yy} + \frac{axx}{2\sqrt{ay+xx}} :: (\dot{y} : \dot{x} ::)$ BD : DT.

Exempl. III.

Sit (*Fig.6.*) ED Conchois *Nicomedæa*, cujus Polus G, Aſymptotus AT, Intervallum LD; & ſit AG $= b$, LD $= c$, AB $= x$, & BD $= y$. Similia Triangula DBL, & DMG dant LB : BD :: DM : MG, id eſt, $\sqrt{cc-yy} : y :: x : b+y$, & idcirco $\overline{b+y}\times\sqrt{cc-yy} = xy$: Hâc Æquatione repertâ, ſuppono $\sqrt{cc-yy} = z$, unde conſequor duas Æquationes $bz + yz = xy$, & $cc - yy = zz$, quarum ope invenio Fluxiones Quantitatum x, y, & z, per Probl. I. Prima dat $b\dot{z} + y\dot{z} + z\dot{y} = y\dot{x} + x\dot{y}$; & Secunda $-2y\dot{y} = 2z\dot{z}$, aut $z\dot{z} + y\dot{y} = 0$. Ex his autem amove $\dot{z}$, inventurus $-\frac{by\dot{y}}{z} - \frac{yy\dot{y}}{z} + z\dot{y} = y\dot{x} + x\dot{y}$; hæc autem Æquatio reſoluta dat $y : z - \frac{yy}{z} - \frac{by}{z} - x :: (\dot{y} : \dot{x} ::)$ BD : BT; atqui BD eſt ipſa y, ergo BT $= z - x - \frac{yy - by}{z}$, ſcilicet $-$BT $=$ AL $+ \frac{BD \times GM}{BL}$, ubi ſignum $-$ præfixum ipſi BT denotat, quòd Punctum T ſumendum eſt ad partes contrarias Puncto A. TAB. I.

SCHOLIUM.

Hinc patet quomodo reperiri valeat in Conchoïde Punctum, quod ſeparat partem convexam à concavâ. Illud enim erit, cùm AT eſt omnium minima. Dic igitur AT $= u$; &, quia BT $= -z + x + \frac{by+yy}{z}$, erit $u = -z + 2x + \frac{by+yy}{z}$. Opus brevius redditurus pro x pone $\frac{bz+yz}{y}$, qui valor manat è ſupra-dictis, &

habebis $\frac{2bz}{y} + z + \frac{by+yy}{z} = u$: Unde erui poſſunt, per Probl. I., Fluxiones $\dot u$, $\dot y$, & $\dot z$; ac, ſupponendo $\dot u = 0$, per Probl. III., invenies $\frac{2b\dot z}{y} - \frac{2bz\dot y}{yy} + \dot z + \frac{b\dot y + 2y\dot y}{z} - \frac{by\dot z + yy\dot z}{zz} = \dot u = 0$. Denique, ſubſtituendo in hâc Æquatione $-\frac{y\dot y}{z}$ pro $\dot z$, & $cc - yy$ pro zz, (quos valores jam inveneramus); ac factâ Reductione legitimâ, obtinebis $y^3 + 3byy - 2bcc = 0$, cujus Æquationis Conſtructio determinabit y vel AM; & MD parallela AB acta per punctum M cadet in Punctum D Flexûs contrarii.

Quod ſi Curvæ, ad quas Tangentes ducendæ ſunt, forent mechanicæ; Quantitatum Fluxiones inveniri deberent, ut in Exempl. V. Probl. I. & cetera fieri ut ſupra.

Exempl. IV.

TAB. II. Sint (*Fig.* 7.) AC, & AD duæ Curvæ, quæ ſecant in Punctis C & D Rectam BCD applicatam Abſciſſæ AB in dato Angulo. Sint $AB = x$, $BD = y$, & $\frac{\text{Area ACB}}{1} = z$; eritque (per Probl. I. Præpar. ad Exemp. V.) $\dot z = \dot x \times BC$.

Jam, ſit AC Circulus vel aliqua ex notis Curvis, & ad determinandam Curvam AD data ſit Æquatio involvens z, puta, $zz + azx = y^4$. Ergo, per Probl. I., $2z\dot z + ax\dot z + az\dot x = 4y^3\dot y$; &, ſcribendo $\dot x \times BC$ pro $\dot z$, erit $2z\dot x \times BC + ax\dot x \times BC + az\dot x = 4y^3\dot y$; quapropter $2z \times BC + ax \times BC + az : 4y^3 :: (\dot y : \dot x ::)$ BD : BT. Igitur, datâ naturâ Curvæ AC, Ordinatâ BC, & Areâ ACB vel z; dabitur etiam Punctum T, per quod tranſit Tangens DT.

Eodem pacto, ſi $3z = 2y$ eſt Æquatio pertinens ad Curvam AD, erit $(3\dot z)\ 3\dot x \times BC = 2\dot y$, & ideo $3BC : 2 :: (\dot y : \dot x ::)$ BD : BT; & ſic de ceteris.

Exmpl.

EXEMPL. V.

Sit $AB = x$, $BD = y$, ut priùs, & longitudo Curvæ $AC = z$; & actâ Tangente quâvis, ut Ct, erit $Bt : Ct :: \dot{x} : \dot{z}$, aut $\dot{z} = \frac{\dot{x} \times Ct}{Bt}$.

Nunc altera Curva AD, ad quam Tangens eſt ducenda, definiatur aliquâ datâ Æquatione involvente z; *ex. gr.*, $z = y$, quocirca $\dot{z} = \dot{y}$, ergo $Ct : tB :: (\dot{y} : \dot{x} ::)\ DB : BT$. Invento autem Puncto T, duci poteſt Tangens DT.

Pariter, ſupponendo $xz = yy$, fiet $x\dot{z} + z\dot{x} = 2y\dot{y}$, unde, ſcribendo $\frac{\dot{x} \times Ct}{Bt}$ pro $\dot{z}$, conficietur $\frac{x\dot{x} \times Ct}{Bt} + z\dot{x} = 2y\dot{y}$, & hinc $z + \frac{x \times Ct}{Bt} : 2y :: BD : DT$.

EXEMPL. VI.

Sit (*Fig.* 8.) AC Circulus, aut quæcumque alia Curva cognita, cujus Tangens eſt Ct; & ſit AD alia Curva, cujus Tangens agi debet, & quæ definitur aſſumendo AB æqualem Arcui AC; Sintque CE, BE Ordinatæ ad AB ſub quovis dato Angulo; & Relatio, quæ eſt inter BD, & CE vel EA, exprimatur Æquatione aliquâ. TAB. II.

Nunc dic AB vel $AC = x$, $BD = y$, $AE = z$, & $CE = u$. Liquet, quòd $\dot{u}$, $\dot{x}$, & $\dot{z}$, Fluxiones ipſarum CE, AC, & AE, eandem inter ſe Rationem habent ac CE, Ct, & Et; quapropter $\frac{\dot{x} \times CE}{Ct} = \dot{u}$, & $\frac{\dot{x} \times Et}{Ct} = \dot{z}$.

Jam, detur Æquatio quævis definiens Curvam AD, puta, $y = z$. Igitur $\dot{y} = \dot{z}$; ergo $Et : tC :: (\dot{y} : \dot{x} ::)\ DB : BT$.

Digitized by Google

Aut data Æquatio ſit $y = z + u - x$, unde aſſequemur $\dot{y} = (\dot{z} + \dot{u} - \dot{x} =)\ \dot{x} \times \frac{CE + Et - tC}{Ct}$, & idcirco $CE + Et - tC : Ct :: (\dot{y} : \dot{x} ::)\ DB : BT$.

Aut denique detur Æquatio $ayy = u^3$, quæ progignet $2ay\dot{y} = (3uu\dot{u} =)\ 3uu\dot{x} \times \frac{CE}{Ct}$: Hinc autem conficitur $3uu \times CE : 2ay \times Ct :: DB : BT$.

EXEMPL. VII.

TAB. II. Sit (*Fig.* 9.) FC Circulus, quem CS tangit in C, & ſit FD Curva, quæ definitur aſſumpta aliquâ Relatione inter Ordinatam DB & Arcum FC terminatum ab AD ductâ per Centrum. Tunc, demiſſâ CE ordinatim ad Circulum, dic AC vel $AF = 1$, $AB = x$, $BD = y$, $AE = z$, $EC = u$, & $CF = t$; hinc habebis $z\dot{t} = (\dot{t} \times \frac{EC}{SC} =)\ \dot{u}$, & $-u\dot{t} = (\dot{t} \times -\frac{ES}{CS} =)\ \dot{z}$; ubi pono $\dot{z}$ Quantitatem negativam, quia AE decreſcit, creſcente EC. Præterea, $AE : EC :: AB : BD$, ergo $zy = ux$, quocirca, per Probl. I, $z\dot{y} + y\dot{z} = u\dot{x} + x\dot{u}$; unde exterminatis $\dot{z}$, $\dot{u}$, & u, provenit $x\dot{y} - yy\dot{t} - xx\dot{t} = y\dot{x}$.

Definiatur nunc Curva DF aliquâ Æquatione, unde excudi poſſit valor ipſius $\dot{t}$ in Æquatione nuper inventâ ponendus. Suppone, *ex. gr.*, $t = y$, (Æquatio ad primam Quadratricem); ergo, per Probl. I., $\dot{t} = \dot{y}$, & $x\dot{y} - yy\dot{y} - xx\dot{y} = y\dot{x}$; quamobrem $y : -x + yy + xx :: (\dot{y} : -\dot{x} ::)\ BD\ (y) : BT$: Eſt igitur $BT = xx + yy - x$, & $AT = xx + yy = \frac{ADq}{AT}$.

Haud aliter, ſi foret $tt = by$, haberemus $2t\dot{t} = b\dot{y}$, & propterea $AT = \frac{b}{2t} \times \frac{ADq}{AF}$, atque ita porro.

EXEMPL.

EXEMPL. VIII.

Sit (*Fig.* 10.) nunc AD Recta æqualis Arcui FC, & Curva ADH Spiralis *Archimedæa*, ſtantibus nominibus, quæ ſupra Lineis impoſuimus. Ob rectum Angulum ABD, eſt $xx + yy = tt$; & idcirco (per Probl. I.) $x\dot{x} + y\dot{y} = t\dot{t}$. Atqui AD : AC :: DB : CE, ergo $tu = y$, & eà de cauſâ (per Probl. I.) $\dot{t}u + \dot{u}t = \dot{y}$. Denique, Fluxio Arcûs FC eſt ad Fluxionem rectæ Lineæ CE, ut CA ad AE, vel ut AD ad AB, videlicet $\dot{t} : \dot{u} :: t : x$; & propterea $x\dot{t} = t\dot{u}$: Confer Æquationes nuper inventas, & perſpicies eſſe $u\dot{t} + x\dot{t} = \dot{y}$; quocirca etiam erit $x\dot{x} + y\dot{y} = (t\dot{t} =) \frac{t\dot{y}}{u+x}$: Ergo, ſi, completo Parallelogrammo ABDQ, facias DQ : QP :: (DB : BT :: $\dot{y} : -\dot{x}$ ::) $x : y - \frac{t}{u+x}$, id eſt, ſi abſcindas AP $= \frac{t}{u+x}$, erit PD Perpendicularis Spirali. TAB. II.

Hinc, opinor, ſatis patet quâ viâ duci poſſint Tangentes ad omnigenas Curvas. Attamen extra rem non puto oſtendere quomodo Problema ſolvi poſſit, quando Curvæ referuntur ad Rectas quocumque alio modo: Eo enim pacto, præ manibus habens plures methodos diverſas, ſemper uſurpare poteris faciliorem ſimul, ac ſimpliciorem.

SECUNDUS MODUS.

Sit (*Fig.* 11.) D Punctum in Curvâ, ex quo ad datum Punctum G ducta ſit ſubtenſa DG, & ſit DB ordinatim applicata ad Abſciſſam AB ſub dato Angulo quocumque. Jam fluat Punctum D per infinitè parvum Curvæ ſpatium D*d*, & ex GD, abſcindatur G*k* æqualis ipſi G*d*, ac compleatur Parallelogrammum *dc*B*b*. Tunc D*k*, & D*c* erunt eodem tempore genita Momenta ipſarum GD, DB, quibus nempe utraque mulctatur, dum D transfertur in *d*. TAB. II.

Jam,

Jam, recta Linea D*d* producatur, donec ſecet ipſam AB in T, & ex Puncto T ad ſubtenſam GD demittatur ad rectos Angulos TF; unde formabuntur ſimilia Trapezia D*cdk*, & DBTF; & ideo BD : DF :: *c*D: D*k*.

Cùm igitur Æquatio Curvam determinans exhibeat Relationem, quæ eſt inter BD & DG, quære Fluxionum Relationem; & abſcinde DF quartam poſt DB, Fluxionem GD, & Fluxionem BD. Dehinc ex F excita Perpendicularem FT, & juncta DT Curvam tanget in D. Erit DF capienda verſùs G, ſi ea eſt affirmativa; & ad contrarias partes, ſi negativa.

Exempl. I.

Dic GD $=x$ & DB $=y$; ac Relatio earum exponatur per $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$: Relatio Fluxionum erit $3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3yy\dot{y} = 0$: Quâ de cauſâ $3xx - 2ax + ay : 3yy - ax :: (\dot{y} : \dot{x} ::)$ DB(y): DF; Ergo DF $= \dfrac{3y^3 - axy}{3xx - 2ax + ay}$. Jam, cùm detur in Curvâ Punctum D, & idcirco BD, & DG, vel y, & x, dabitur etiam Punctum F; ex quo ſi educatur Perpendicularis FT, hæc Abſciſſæ AB occurrens in T, aperiet viam ad ducendam Tangentem TD.

Hinc, ut patet, manat ipſa eadem Regula, quam pro primo caſu inveneramus. Nam, diſpone omnes datæ Æquationis Terminos in unâ eâdémque parte, eos multiplica per Ordinatæ y Dimenſiones, &, quod hinc provenit, pone in Fractionis Numeratorem: Deinde ſingulos hos Terminos duc in Subtenſæ x Dimenſiones, Factum divide per Subtenſam x, & Quotientem adſcribe Denominatori valoris DF: Illam verò Lineam DF ſumes verſùs G, ſi affirmativus eſt ejus valor; ſin minùs, ad contrarias partes. Hic animadvertere potes, quòd in toto hoc negotio nulla habetur ratio diſtantiæ Puncti G ab Abſciſſâ AB, (licèt nulla eſſet hæc diſtantia,) nec Anguli ABD, quem Ordinata BD facit cum Abſciſſâ BA.

Sit

Sic Æquatio ſuperior $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$ ſtatim dat $axy - 3y^3$ pro Numeratore, & $3xx - 2ax + ay$ pro Denominatore valoris D F.

Sic pariter $a + \frac{b}{a}x - y = 0$ (Æquatio ſpectans ad conicas Sectiones) præbet $-y$ pro Numeratore, & $\frac{b}{a}$ pro Denominatore valoris D F, ideo futuræ $= -\frac{ay}{b}$.

Haud aliter (*Fig.* 6.) in Conchoïde, (in quâ Problema ſolvi poteſt expeditiùs quàm ſupra,) ponendo $GA = b$, $LD = c$, $DG = x$, & $BD = y$; erit BD (y): DL (c) :: AG (b): GL ($x - c$); quare $xy - cy = bc$ aut $xy - cy - bc = 0$. Hæc Æquatio, juxta Regulam, dat $\frac{xy - cy}{y}$, videlicet $x - c = DF$. Produc igitur GD in F, ita ut ſit $DF = LG$; ad F erige Perpendicularem F T, quæ occurrat Aſymptoto A B in T; acta T D Conchoïdem tanget. TAB. I.

Si quando autem compoſitæ aut ſurdæ Quantitates ſunt in Æquatione, confugiendum eſt ad generalem Methodum, niſi malis Æquationem reducere.

EXEMPL. II.

Si (*Fig.* 11.) Æquatio $\overline{b+y} \times \sqrt{cc - yy} = xy$ daretur ad exprimendam Relationem, quæ inter G D, & D B intercedit; quære Fluxionum Relationes, per Probl. I., *ex. gr.*, ſuppone $\sqrt{cc - yy} = z$, unde conficientur Æquationes $bz + yz = xy$, & $cc - yy = zz$: Hinc invenientur Fluxionum Relationes $b\dot{z} + y\dot{z} + z\dot{y} = x\dot{y} + y\dot{x}$, & $-2y\dot{y} = 2z\dot{z}$. Nunc, exterminatis $\dot{z}$ & z, habebis $\dot{y}\sqrt{cc - yy} - \frac{by\dot{y} + yy\dot{y}}{\sqrt{cc - yy}} - x\dot{y} = y\dot{x}$; igitur $y : \sqrt{cc - yy} - \frac{by + yy}{\sqrt{cc - yy}} - x$ :: ($\dot{y} : \dot{x}$ ::) BD (y): D F. TAB. II.

TERTIUS MODUS.

TAB. II. Quinimo (*Fig.* 12.) ſi Curva referretur ad duas ſubtenſas AD & DB, quæ ductæ à duobus datis Punctis A, & B, convenirent ad Curvam. Concipe Punctum D fluere in Curvâ per infinitè parvum ſpatium D*d*, & ex AD, ac DB, abſcinde A*k* quidem æqualem A*d*, & B*c* parem B*d*; tunc *k*D & D*c*, erunt ſimul genita Momenta Linearum AD, DB. Quapropter ſume FD, quæ ad DB habeat eandem Rationem ac Momentum *k*D ad Momentum D*c*, (id eſt Fluxio Rectæ AD ad Fluxionem ipſius DB); & age BT, TF Perpendiculares ipſis DB, AD, & ſibi mutuò occurrentes in T: ſimilia erunt Trapezia DFTB ac D*kdc*, quamobrem Diagonalis DT Curvam tanget.

Igitur ex Æquatione definiente Relationem, quæ eſt inter AD & DB excude, per Probl. I., Relationem, quæ inter Fluxiones intercedit, & abſcinde DF habentem ad DB eandem Rationem.

EXEMPL. I.

Supponamus AD $= x$, & DB $= y$, & earum Relatio ſit $a + \frac{ex}{d} - y = 0$. Hæc autem Æquatio ſpectat ad Ellipſes ſecundi Ordinis, quarum Proprietates pertinentes ad Lucis Refractionem demonſtratæ fuerunt à CARTESIO in ſecundo ſuæ *Geometriæ* Libro.

Jam Fluxionum Relatio erit $\frac{e\dot{x}}{d} - \dot{y} = 0$, quapropter $e : d ::$ $(\dot{y} : \dot{x} ::)$ BD : DF.

Eâdem ratione, ſi foret $a - \frac{ex}{d} - y = 0$, haberemus $e : -d$ :: BD : DF. In primâ hypotheſi ſumi deberet DF verſùs A, & ad contrarias partes in ſecundâ.

COROLL. I.

Ergo ſi $d = e$, (tunc autem Curva evaderet Sectio conica,) eſſet

eſſet FD = DB; & propterea Triangula DFT, & DBT, æqualia eſſent, & Angulus FDB biſectus à Tangente.

Coroll. II.

Hinc etiam ſponte fluunt ea, quæ ſatis operoſè demonſtravit Cartesius de Lucis per has Curvas Refractione. Nam, ſi DT ſumatur pro Radio, ſunt DF, & DB, (qui ſunt in datâ Ratione *d* ad *e*,) ſinus Angulorum DTF, & DTB, quos nempe faciunt Radius AD Incidens in ſuperficiem Curvæ, & ejus Reflexus aut Refractus DB. Et ſimiliter eſt ratiocinandum de Refractione Sectionum conicarum, cùm alterutrum ex Punctis A vel B concipitur ad infinitum intervallum.

Facilè modificari poſſet hæc Regula, ut de ſuperiore fecimus, & plura harum modificationum exempla afferre: Quinimo, ſi quâvis aliâ ratione Curvæ referantur ad Rectas, nec facilè ad ſuperiores Relationum modos revocari poſſint, facile erit, pro re natâ, novas Methodos invenire in allatarum imitationem.

QUARTUS MODUS.

Gyret, (*Fig.* 14.) *ex. gr.*, recta Linea BCD circa datum Punctum B, & unum ex Punctis ejus D deſcribat Curvam quamdam, dum alterum C ſemper eſt in communi Sectione Rectæ BCD & alterius Rectæ AC poſitione datæ. Exprimatur inſuper Æquatione aliquâ Relatio, quæ eſt inter CB, & BD: Age BF Parallelam ipſi AC, eámque produc, donec in F occurrat ipſi FD Perpendiculari ad B: Rurſus erige FT ad rectos Angulos ipſi DF; & inveni FT, quæ ad BC eandem habeat Rationem ac Fluxio DB ad Fluxionem BC. Tanget enim Curvam acta DT. TAB. III.

QUINTUS MODUS.

Sed ſi, dato Puncto A, Æquatio exprimeret Relationem inter AC, & BD, agere deberes CG Parallelam ipſi DF, & quærere FT, ita ut ea foret ad BG, ut Fluxio BD eſt ad Fluxionem AC.

Digitized by Google

SEXTUS MODUS.

Rurſus, ſi Æquatio exponeret Relationem inter AC, & CD, conveniant Rectæ AC & FT in H, & ſume HT, quæ ad BG eandem habeat Rationem ac Fluxio DC ad Fluxionem CA. Et ſic de ceteris.

SEPTIMUS MODUS.

Pro Spiralibus.

Neque aliter perficitur Problema, cùm Curvæ referuntur, non ad rectas Lineas, ſed ad alias Curvas; quod uſu-venit in mechani-TAB. III. cis Curvis. Sit (*Fig.* 15.) BG Peripheria Circuli, cujus ſemidiameter eſt AG, quæ dum gyrat circa Centrum A, concipiatur Punctum D moveri quovis pacto, dummodo Spiralem aliquam ADE deſcribat: Suppone Dd eſſe infinitè exiguam partem Curvæ, per quam fluat D, ac ſume cA = Ad; eruntque cD, & Gg, eodem tempore nata Momenta Rectæ AD & Peripheriæ BG: Quapropter age At Parallelam cd, id eſt, ad rectos Angulos ipſi AD, eámque ſecet in T Tangens TD; tum erit Dc : cd :: DA : AT. Rurſum ſit Gt Parallela Tangenti DT, & habebis cd : Gg :: (Ad vel AD : AG ::) AT : At.

Quocirca, propoſitâ Æquatione exprimente Relationem, quæ intercedit inter ipſas BG & AD, quære Relationem, quæ eſt inter earum Fluxiones, per Probl. I. & fac in eâdem Ratione tA ad AG; Juncta Gt erit Tangenti parallela.

EXEMPL. I.

Dictis BG $= x$, & AD $= y$, ſit earum Relatio $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$: Erit, per Probl. I, $3xx - 2ax + ay : 3yy - ax :: (\dot{y} : \dot{x} ::)$ DA : At: Puncto autem t ſic invento, age tG & ipſi parallelam DT, quæ Curvam tanget.

EXEMPL.

EXEMPL. II.

Si haberetur $\frac{ax}{b}=y$, (quæ eſt Æquatio ad Spiralem *Archimedeam*,) eſſet $\frac{a\dot{x}}{b}=\dot{y}$, & idcirco $a : b :: (\dot{y} : \dot{x} ::)$ DA : A*t*. Unde, obiter, ſi producatur AT in P, ita ut ſit PA : AB :: *a* : *b*, juncta PD erit Perpendicularis ad Curvam.

EXEMPL. III.

Si eſſet $xx=by$, foret $2x\dot{x}=b\dot{y}$, & $2x : b ::$ DA : A*t*. Et hoc pacto Tangentes facilè duci poſſunt ad quaſcumque Spirales.

OCTAVUS MODUS.

Pro Quadratricibus.

Si verò Curva eſſet ejuſmodi naturæ, ut quævis Recta AGD (*Fig.* 16.) acta per Centrum A ſecaret Arcum Circuli in G & Curvam in D, ac Relatio, quæ eſt inter Arcum BG, & rectam Lineam DH ordinatim applicatam Baſi aut Abſciſſæ AH ſub dato Angulo, definiretur Æquatione quâlibet: Concipe Punctum D moveri in Curvâ per infinitè parvum ſpatiolum D*d*, & comple Parallelogrammum *db*H*k*; dehinc produc A*d* ad *c*, ut *c*A = AD; eruntque G*g* ac D*k*, ſimul generata Momenta Arcûs BG & Ordinatæ DH. Jam, produc D*d* rectà in T, ubi occurret ipſi AB, & hinc educ TF perpendicularem ad D*c*F: Erunt igitur ſimilia Trapezia D*kdc* & DHTF, quocirca *k*D : D*c* :: DH : DF. Quòd ſi præterea ducatur G*f* ad rectos Angulos ipſi AG & ſecans AF in *f*, erit, (ob Parallelas DF & G*f*,) D*c* : G*g* :: DF : G*f*; ergò, *ex æquo*, D*k* : G*g* :: DH : G*f*, id eſt, ut Momenta Fluxionum Linearum DH, & BG. TAB. III.

Quære igitur ex Æquatione exponente Relationem BG ad DH Relationem Fluxionum (per Probl. I.); & in eâdem Ratione fac

Gf, Tangentem ſcilicet Circuli BG, ad DH; age DF Parallelam Gf, quæ ſecet Af productam in F, ad F erige Perpendicularem FT occurrentem ipſi AB in T, & juncta DT tanget Quadratricem.

Exempl. I.

Faciendo $BG = x$, & $DH = y$, ſit $xx = by$, ergo (per Probl. I.) $2x\dot{x} = b\dot{y}$; quapropter $2x : b :: (\dot{y} : \dot{x} ::)$ DH : Gf; & Puncto f determinato, cetera perficientur ut ſupra.

Sed hæc Regula poteſt aliquando ſic fortaſſe elegantior fieri: Fac $\dot{x} : \dot{y} ::$ BA : AL: Deinde, AL : AD :: AD : AT; ac juncta DT Curvam tanget. Nam, æqualia Triangula AFD, ATD dant AD $\times$ DF = AT $\times$ DH, &, propterea, AT : AD :: (DF vel $\frac{AD}{AG}$ $\times Gf$: DH aut $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} Gf$ ::) AD : ($\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ AG ſive) AL.

Exempl. II.

Sit $x = y$ (quæ Æquatio ad Veterum Quadraticem pertinet), erit quoque $\dot{x} = \dot{y}$: Quocirca AB : AD :: AD : AT.

Exempl. III.

Sit $axx = y^3$, ergo $2ax\dot{x} = 3yy\dot{y}$: Fac itaque $3yy : 2ax :: (\dot{x} : \dot{y} ::)$ AB : AL; deinde AL : AD :: AD : AT, & ſic expeditè determinare licet Tangentes ad quaſcumque alias Quadratices quantumlibet compoſitas.

Nonus Modus.

Denique ſit ABF data quævis Curva, quam tangit Recta Bt; & BD pars Rectæ BC, (quæ ordinatim applicata eſt ſub dato quolibet Angulo Abſciſſæ AC,) intercepta inter hanc datam & aliam Curvam

Curvam DE, ad partem Curvæ AB habeat Relationem aliquam expreſſam Æquatione quâcumque; ad ſecundam hanc Curvam duces Tangentem DT, ſumendo (in prioris Curvæ Tangente) TB, quæ ad BD habeat eandem Rationem ac Fluxio Curvæ AB ad Fluxionem Rectæ BD.

EXEMPL. I.

Vocatis $AB = x$, & $BD = y$, ſit $ax = yy$, & ideo $a\dot{x} = 2y\dot{y}$. Erit $a : 2y :: (\dot{y} : \dot{x} ::)$ BD : BT.

EXEMPL. II.

Sit $\frac{a}{b}x = y$, (Æquatio ad Trochoïdem ſi ABF eſt Circulus,) ergo $\frac{a}{b}\dot{x} = \dot{y}$, & $a : b ::$ BD : BT.

Nec difficiliùs ducentur Tangentes, cùm Relatio, quæ eſt inter BD & AC aut CB, expreſſa eſt per Æquationem aliquam, vel quando Curvæ referuntur ad rectas Lineas, ſive ad alias quaſvis Curvas, quomodocumque demum id fiat.

Aliorum quoque Problematum Solutio deduci poteſt ex iiſdem Principiis. Hujus generis ſunt ſequentia.

I.

Invenire in Curvâ Punctum, in quo Tangens parallela ſit Abſciſſæ, vel cuivis alteri Lineæ rectæ poſitione datæ, aut ad eam perpendicularis, vel obliqua ſub Angulo dato.

II.

Invenire Punctum, ubi Tangens eſt omnium maximè, vel minimè inclinata ad Abſciſſam, vel ad aliam rectam Lineam poſitione datam. Videlicet.

Invenire confinia Flexuum contrariorum. Hujus Problematis ſpecimen jam dedimus in Conchoïde.

III. *Ex*

III.

Ex Puncto dato extra Curvæ Perimetrum ducere Rectam, quæ cum Perimetro faciat Angulum Contactûs, vel rectum vel quemcumque datum. Scilicet, *Ex dato Puncto ducere ad Curvas Tangentem, vel Perpendicularem, vel Rectam quomodocumque inclinatam.*

IV.

Ex Puncto dato intra Parabolam ducere Lineam rectam, facientem cum Perimetro omnium maximum vel minimum Angulum. Et idem facere in Curvis quibuſlibet.

V.

Rectam ducere, quæ tangat duas Curvas poſitione datas, aut unam eandémque in duobus Punctis; ubi id fieri poteſt.

VI.

Curvam ſub Legibus datis deſcribere, quæ aliam Curvam poſitione datam tangat in dato Puncto.

VII.

Determinare Refractionem Lucis Radii, qui cadit in quamcumque Curvam Superficiem.

Reſolutio horum & ſimilium Problematum adeò difficilis non eſt (præter Computationis moleſtiam), ut hìc in iis moremur, & bene me Geometris conſuluiſſe puto eorum mentionem ſolùm faciendo.

PROBL. V.

Determinare Quantitatem Curvaturæ, quam habet data quævis Curva in dato Puncto.

Pauca

Pauca ſunt Problemata Curvas ſpectantia hoc elegantiora, & quæ penitiùs earum naturam detegant. Ad hujus Reſolutionem præmitto ſequentia generalia.

I.

Idem Circulus ubique eandem habet Curvaturam, & in diverſis Circulis ea eſt in reciprocâ Diametrorum Ratione. Si Diameter unius Circuli ſubdupla eſt Diametri Circuli aliùs, Curvatura primi erit dupla Curvaturæ ſecundi. Si primi Diameter eſt ſubtripla Diametri ſecundi, Curvatura primi erit tripla Curvaturæ ſecundi, &c.

I I.

Si Circulus tangat Curvam in ejus parte concavâ ad datum Punctum, & ejuſmodi magnitudinis ſit, ut nullus alius Circulus tangens, poſſit deſcribi intra Angulum hujus Contactûs, Circulus ille eandem habebit Curvaturam ac Curva in Contactûs Puncto. Nam, Circulus, qui deſcriptus eſſet inter Curvam & alium Circulum per Punctum Contactûs, minùs differret à Curvâ quàm alter Circulus, & magis quàm ille, accederet ad Curvæ illius Curvaturam. Ergo ejus Curvaturæ proximus omnium eſt Circulus ille, inter quem & Curvam nullus alius Circulus deſcribi poteſt.

I I I.

Quapropter Centrum Curvaturæ, quam habet Curva in quolibet Puncto, eſt Centrum Circuli æquè curvi; & ideo Radius vel ſemidiameter Curvaturæ, eſt Rectæ perpendicularis ad Curvam pars intercepta inter Curvam & Centrum hoc.

I V.

Et Ratio Curvaturæ in diverſis Punctis noſcetur ex Ratione Curvaturæ Circulorum æquè curvorum ac Curva in Punctis illis, aut ex reciprocâ Ratione Radii Curvaturæ.

 Igitur

Igitur Problema verſatur in hoc, ut reperiatur Radius aut Centrum Curvaturæ.

TAB. III. Quamobrem concipe, quòd (*Fig.* 18.) ad tria Curvæ Puncta *δ*, D, & *d* actæ ſunt Perpendiculares, quarum quæ ſunt ad *δ*, & D, conveniunt in H, quæ verò ad D, & *d*, in *h*; ac Punctum D ſit inter Puncta *δ* & *d*: Si Curvatura major eſt verſùs D*δ* quàm verſùs D*d*, erit DH minor quàm *dh*. Sed, quo magis Perpendiculares *δ*H, & *dh*, accedunt mediæ Perpendiculari DH, eo minùs diſtant Puncta H, & *h*; & denique, cùm hæ Perpendiculares coeunt, coïncidunt etiam hæc Puncta: Coïncidant igitur in C; erit illud Curvaturæ Centrum ad Curvæ Punctum D, in quo Perpendiculares conſiſtunt. Quod per ſe patet.

Sed Punctum illud C plura habet Symptomata vel Proprietates, quæ non inutiles erunt ad illud determinandum.

I.

Ibi conveniunt Perpendiculares, quæ hinc inde ſunt ab ipſâ DC, & ab illâ infinitè parum diſtant.

II.

Illud ſeparat ac diſtinguit Interſectiones Perpendicularium, quæ utrimque ſunt ad finitum & exiguum Intervallum, ita ut eæ, quæ ſunt ad partem magis curvam D*δ*, conveniant ſupra illud in H, & quæ ad minùs curvam D*d*, infra illud in *h*.

III.

Si DC moveri intelligatur, & ſemper tamen ſit Perpendicularis ad Curvam, ejus Punctum C, (excepto motu, quo accedit vel recedit à Puncto Inſiſtentiæ C,) omnium minimè movetur, quin eſt quaſi Centrum Motûs.

IV. Si.

Digitized by Google

I V.

Si Centro C & Radio CD Circulus deſcribatur, nullus alius Circulus agi poteſt per Punctum Contactûs inter hunc & Curvam.

V.

Denique, ſi Centrum H aut *h* alterius Circuli tangentis, gradatim accedat ad illius Centrum C, donec tandem cum eo coeat, tunc quodcumque Punctum, in quo hic Circulus Curvam ſecat, coincidet cum D Puncto Contactûs.

Hæ Proprietates ſingulæ aperire poſſunt viam ad Problema pluribus modis ſolvendum: Nos autem ex his primam eligemus, velut ſimpliciorem.

Ad quodcumque (*Fig.* 19.) Curvæ Punctum D agantur DT Tangens, & DC Perpendicularis; & Sit C Centrum Curvaturæ, ut antea. Præterea, ſit AB Abſciſſa, cui BD applicatur ad rectos Angulos, & quam DC ſecat in P. Age DG parallelam AB, & GC ei perpendicularem, ex quâ abſcinde Cg cujuſvis datæ magnitudinis, & ad eam age perpendicularem $g\delta$, quæ ſecet ipſam CD in δ. Tunc erit Cg : $g\delta$ :: (BT : BD ::) Fluxio Abſciſſæ ad Fluxionem Ordinatæ. Pariter, intellige Punctum D infinitè parum progredi in Curvâ uſque ad d; & actâ de ad rectos Angulos ipſi DG, ac Cd perpendiculari ad Curvam, Cd ſecet DG in F, & $g\delta$ in f. Erunt De Momentum Abſciſſæ, de Momentum Ordinatæ, & δf eodem tempore ſubortum Momentum Rectæ $g\delta$. Quapropter DF $=$ De $+ \frac{de \times de}{De}$. Cùm igitur habeas Rationes horum Momentorum, aut, (quod idem eſt,) Fluxionum Momenta hæc generantium, habebis Rationem ipſius CG ad datam Lineam Cg, (quæ eadem eſt ac Ratio ipſius DF ad δf,), & hinc determinabitur Punctum C.

Sit igitur AB $= x$, BD $= y$, C$g = 1$, & $g\delta = z$; erit $1 : z :: \dot{x} : \dot{y}$, aut $z = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Jam δf Momentum ipſius z ſit $o \times \dot{z}$, (id

eſt Factum ex Velocitate in infinitè exiguam Quantitatem o,) erunt ideo Momenta $De = o \times \dot{x}$, $de = o \times \dot{y}$, & idcirco $DF = o\dot{x} + \frac{o\dot{y}\dot{y}}{\dot{x}}$: Quâ de cauſâ eſt $Cg(1) : CG :: (\delta f : DF ::) o\dot{z} : o\dot{x} + \frac{o\dot{y}\dot{y}}{\dot{x}}$; id eſt, $CG = \frac{\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y}}{\dot{x}\dot{z}}$.

Et quia licet ex arbitrio tribuere quamcumque Velocitatem Fluxioni Abſciſſæ $\dot{x}$, (ad quam, tanquam ad æquabilem Fluxionem, ceteræ poſſunt referri) fac $\dot{x} = 1$, & idcircò $\dot{y} = z$, & $CG = \frac{1 + zz}{\dot{z}}$, ergo $GD = \frac{z + z^3}{\dot{z}}$, & $DC = \frac{\overline{1+zz} \times \sqrt{1+zz}}{\dot{z}}$.

Propoſitâ igitur Æquatione, quæ contineat Relationem inter DB & BA, ad Curvam definiendam, primò quære Relationem, quæ eſt inter $\dot{x}$, & $\dot{y}$, per Probl. I., & eodem tempore pone 1 pro $\dot{x}$, & z pro $\dot{y}$. Deinde ex Æquatione hinc proveniente, per idem Probl. I.; excude Relationem inter $\dot{x}$, $\dot{y}$, & $\dot{z}$, & ſimul ſubſtitue 1 pro $\dot{x}$, & z pro $\dot{y}$, ut antea. Hoc pacto prima Operatio dabit valorem ipſius z, & ſecunda $\dot{z}$; quibus inventis, produc BD in H, concavam Curvæ partem verſùs, ita ut $DH = \frac{1 + zz}{\dot{z}}$; & age HC parallelam AB, quæ ſecet Perpendicularem CD in C; erit C Centrum Curvaturæ, quâ Curva gaudet in D. Vel, quia eſt $1 + zz = \frac{PT}{BT}$, ſume $DH = \frac{PT}{\dot{z} \times BT}$, aut $DC = \frac{DP^3}{\dot{z} \times DB^3}$.

Exempl. I.

Sic Æquatione $ax + bxx - yy = 0$ propoſitâ, (quæ eſt ad Hyperbolam, cujus Latus rectum eſt a, tranſverſum autem $\frac{a}{b}$,), habebi-

habebimus (per Probl. I.) $a + 2bx - 2zy = 0$, (ponendo ſcilicet 1 pro $\dot{x}$, & z pro $\dot{y}$ in Æquatione proveniente, quæ ceteroquin eſſet $a\dot{x} + 2bx\dot{x} - 2y\dot{y} = 0$), & hinc iterum exſurget $2b - 2zz - 2y\dot{z} = 0$, (rurſus 1 & z ſcriptis pro $\dot{x}$ & $\dot{y}$,): Ex primâ reperies $z = \frac{a + 2bx}{2y}$, & ex alterâ $\dot{z} = \frac{b - zz}{y}$. Quapropter, aliquo Puncto D in Curvâ dato, & propterea datis x & y, hinc dabuntur z & $\dot{z}$; quibus cognitis, abſcinde CG vel DH $= \frac{1 + zz}{\dot{z}}$, & age HC.

Si in Numeris ponas $a = 3$, & $b = 1$ ita ut $3x + xx = yy$, exprimat naturam Hyperbolæ. Et ſi aſſumas $x = 1$, erit $y = 2$, $z = \frac{5}{4}$, $\dot{z} = -\frac{9}{32}$, & DH $= -9\frac{1}{9}$. Jam, reperto Puncto H, educ Perpendicularem HC, quæ ſecet Perpendicularem CD, antea ductam, aut (quod idem eſt) fac DH : HC :: (1 : z ::) 1 : $\frac{5}{4}$, eritque juncta CD Radius Curvaturæ.

Cùm arbitraris Computationem non nimis perplexam futuram, ſubſtituere potes indefinitos valores ipſarum $\dot{z}$, & z, in $\frac{1 + zz}{\dot{z}}$, quæ exponit valorem ipſius CG. Hoc pacto in præſenti Exemplo habebis per debitam Reductionem DH $= y + \frac{4y^3 + 4by^3}{aa}$. Tamen valor ipſius DH à computatione præbetur negativus, ut videre potes in Exemplo Numerali. Quod negotium ſolùm indicat ipſam DH capiendam eſſe B verſùs; Si enim valor ipſe foret affirmativus, Recta illa ſumenda eſſet contrarias partes verſùs.

COROLL. I.

Hinc, Si ſignum præfixum ſymbolo $+ b$ mutetur, ut fiat $ax - bxx - yy = 0$, (Æquatio ad Ellipſim,) hinc aſſequeremur DH $= \frac{4y^3 - 4by^3}{aa} + y$.

Coroll. II.

Sed ſi $b = 0$, quo pacto Æquatio evaderet $ax - yy = 0$, (quæ ſpectat ad Parabolam,) tunc DH eſſet $= y + \frac{4y^3}{aa}$, & hinc DG $= \frac{1}{2}a + 2x$.

Coroll. III.

Ex his expreſſionibus facilè confici poteſt, quòd Radius Curvaturæ pro quâlibet Sectione conicâ ſemper eſt $\frac{4DP^3}{aa}$.

Exempl. II.

Si daretur $x^3 = ayy - xyy$, (quæ Æquatio pertinet ad Ciſſoïdem Dioclis;) per Probl. I., eſſet primò $3xx = 2azy - 2xzy - yy$, & deinde $6x = 2ay\dot{z} + 2azz - 2zy - 2xy\dot{z} - 2xzz - 2zy$, ergo $z = \frac{3xx + yy}{2ay - 2xy}$, & $\dot{z} = \frac{3x - azz + xzz + 2zy}{ay - xy}$. Quocirca, dato aliquo Puncto in Ciſſoïde, & propterea datis x & y, dabuntur quoque z & $\dot{z}$; quibus cognitis, abſcinde CG $= \frac{1 + zz}{\dot{z}}$.

Exempl. III.

Si $\overline{b + y} \times \sqrt{cc - yy} = xy$, (quam Æquationem ſpectare ad Conchoïdem jam invenimus, pag. 91. hujus,) fac $\sqrt{cc - yy} = u$, unde orietur $bu + uy = xy$. Nunc harum Æquationum prima, (videlicet $cc - yy = uu$,) dat (per Probl. I.) $- 2y\dot{y} = 2u\dot{u} = - 2yz$, (ſcribendo z pro $\dot{y}$,), altera verò præbet $b\dot{u} + y\dot{u} + zu = \dot{y} + x\dot{z}$. Hæ Æquationes rectè diſpoſitæ determinabunt $\dot{u}$ & $\dot{z}$:

Ut

Ut autem inveniatur etiam $\dot{z}$, extermina ex ultimâ Æquatione Fluxionem $\dot{u}$, ſubſtituendo $-\frac{yz}{u}$, unde fiet $-\frac{byz}{u}-\frac{yyz}{u}+uz=y+xz$, Æquatio, quæ ſolas complectitur Quantitates fluentes abſque Fluxionibus, ut requirit Solutio primi Problematis. Quapropter hinc, per Probl. I., habebis $-\frac{bzz}{u}-\frac{by\dot{z}}{u}+\frac{byz\dot{u}}{uu}-\frac{2yzz}{u}-\frac{yy\dot{z}}{u}+\frac{yyz\dot{u}}{uu}+u\dot{z}+z\dot{u}=2z+x\dot{z}$. Hæc autem Æquatio reducta & in ordinem diſpoſita dabit $\dot{z}$: Datis autem z & $\dot{z}$; ſume $GC=\frac{1+zz}{\dot{z}}$.

Si hanc Æquationem ultimam diviſiſſes ſolùm per z, tunc, per Probl. I., habuiſſes $-\frac{bz}{u}+\frac{by\dot{u}}{uu}-\frac{2yz}{u}+\frac{yy\dot{u}}{uu}+\dot{u}=z-\frac{y\dot{z}}{zz}$, quæ Æquatio definiens $\dot{z}$, ſimplicior fuiſſet illâ quam inveneramus.

Hoc Exemplum tradidi, ut videre poſſes quomodo perficienda eſt Operatio, cùm dantur Æquationes implicatæ Quantitatibus ſurdis: Alioquin Curvatura Conchoïdis inveniri poſſet breviori ratione, ſic: Partes Æquationis $\overline{b+y}\times\sqrt{cc-yy}=xy$ quadratæ & diviſæ per yy, præbent $\frac{bbcc}{yy}+\frac{2bcc}{y}+cc-bb-2by-yy=xx$; ergo, per Probl. I., $-\frac{2bbccz}{y^3}-\frac{2bccz}{yy}-2bz-2yz=2x$, vel $-\frac{bbcc}{y^3}-\frac{bcc}{yy}-b-y=\frac{x}{z}$; & hinc, rurſum per Probl. I., $\frac{3bbccz}{y^4}+\frac{2bccz}{y^3}-z=\frac{1}{z}-\frac{x\dot{z}}{zz}$. Per quarum primam determinatur z; & $\dot{z}$ per ſecundam.

EXEMPL. IV.

TAB. IV. Sit (*Fig.* 20.) ADF Trochoïs, (vel Cycloïs,) pertinens ad Circulum ALE, cujus Diameter eſt AE; & poſito quòd Ordinata BD Circulo occurrat in L, dic AE $= a$, AB $= x$, BL $= u$, BD $= y$, & Arcum AL $= t$, ac Fluxionem ejuſdem Arcûs $= \dot{t}$. Et primò, (ductâ ſemidiametro PL,) erit Fluxio Baſeos aut Abſciſſæ AB ad Fluxionem Arcûs AL, ut BL ad LP, id eſt, $\dot{x}$ vel $\dot{x} : \dot{t} :: u : \frac{1}{2}a$; igitur $\frac{a\dot{x}}{2u} = \dot{t}$. Jam, ex Circuli naturâ, eſt $ax - xx = uu$, & idcirco, per Probl. I., $a\dot{x} - 2x\dot{x} = 2u\dot{u}$, vel $\frac{a - 2x}{2u}\dot{x} = \dot{u}$.

Præterea, ob Trochoïdis naturam, eſt LD æqualis Arcui LA, id eſt, $u + t = y$: Unde (per Probl. I.) $\dot{u} + \dot{t} = \dot{y}$: Denique, pro Fluxionibus $\dot{t}$ & $\dot{u}$ ſcribe earum valores, & obtinebis $\frac{a - x}{u} = z$: Et hinc (per Probl. I.) erues $-\frac{a\dot{u}}{uu} + \frac{x\dot{u}}{uu} - \frac{1}{u} = \dot{z}$. Quibus inventis abſcinde $-$ DH $= \frac{1 + zz}{\dot{z}}$, & age Perpendicularem HC.

COROLL. I.

Hinc ſequitur, quòd DH $=$ 2BL, & HC $=$ 2BE, aut, quòd EF biſecat CD Radium Curvaturæ in N. Quod patebit ſubſtituendo valores ipſarum z & $\dot{z}$, nuper inventos in Æquatione $\frac{1 + zz}{\dot{z}} =$ DH, & aptè reducendo quod hinc conficitur.

COROLL. II.

Quamobrem, Curva FCK indefinitè deſcripta à Centro Curvaturæ

turæ ipſius ADF eſt altera Trochoïs huic æqualis, cujus Vertices ad I & F tangunt hujus Cuſpides. Sit enim Circulus Fλ æqualis Circulo ALE & ſimiliter poſitus; & Cβ parallela ipſi EF ducatur occurrens Circulo in λ, erit Arcus Fλ æqualis (Arcui EL, qui æquat Rectam FN, quæ eſt æqualis) Cλ.

COROLL. III.

Recta eadem CD, quæ ad rectos Angulos inſiſtit Trochoïdi IAT, tangit Trochoïdem IKF in Puncto C.

COROLL. IV.

Hinc, ſi (in inverſis Trochoïdibus) Cuſpidi K ſuperioris Trochoïdis appendatur pondus filo ad intervallum KA vel 2EA, & filum ſupponatur ſemet, (dum pondus oſcillat,) applicare partibus Trochoïdis FK, & KI, quæ hinc inde prohibent ne filum extendatur in rectâ Lineâ, ſed illud compellunt, (ſimul ac à Perpendiculari diſceſſit,) ad ſe gradatim inflectendum ſurſum & ad mutuandam Trochoïdis figuram, dum ejus inferior pars CD infra ultimum Punctum Contactûs ſemper manet in Lineâ rectâ, pondus hoc movebitur in Perimetro Trochoïdis inferioris; eſt enim filum ei ſemper ad rectos Angulos.

COROLL. V.

Ergo tota Longitudo fili KA æqualis eſt Perimetro Trochoïdis KCF, ejúſque pars CD æqualis ipſi CF parti hujus Perimetri.

COROLL. VI.

Quia filum oſcillans movetur circa Punctum mobile C, tanquam circa Centrum; ſuperficies, quam tota Linea CD indeſinenter percurrit, eſt ad ſuperficiem, quam pars CN ſupra Rectam IF peragrat per idem Tempus, ut CD^2 ad CN^2, ſcilicet ut 4 ad 1. Eſt ergo

Area CFN ſubquadrupla Areæ CFD, & Area KCNE ſubquadrupla Areæ AKCD.

Corol. VII.

Item, quia Subtenſa EL æqualis eſt & parallela ipſi CN, & convertitur circa immobile Centrum E, ad amuſſim, ut CN convertitur circa mobile Centrum C, Superficies, quas eodem Tempore ambæ deſcribunt, æquales erunt, id eſt, Area CFN æquabit Circuli ſegmentum EL: Quocirca Area NFD æquabit ter ſegmentum illud, & tota Area EADF erit tripla ſemicirculi.

Corol. VIII.

Cùm pondus D pervenit ad Punctum F, totum filum circumvolutum fuit Trochoïdis Perimetro KCF, & Radius Curvaturæ in nihilum evanuit. Quapropter Trochoïs IAF ad Cuſpidem F magis curva eſt, quàm Circulus quilibet, & cum Tangente Fβ productâ, facit Angulum Contactûs infinitè majorem illo quem Circulus quivis facere poteſt cum rectâ Lineâ.

Sed dantur Anguli Contactûs qui ſunt infinitè majores, quàm quilibet ex iis, quos facit Trochoïs, & alii rurſùs his infinitè majores, & ſic in infinitum; attamen eorum maximus infinitè minor eſt Angulis Rectilineis. Sic $xx = ay$, $x^3 = byy$, $x^4 = cy^3$, $x^5 = dy^4$, &c., exprimunt Seriem Curvarum, quarum ſingulæ ſucceſſivè faciunt cum Abſciſſâ Angulos Contactûs infinitè majores omnibus iis, quos Curvæ præcedentes facere poſſunt cum eâdem Abſciſſâ. Anguli autem Contactûs, quos prima Curva expoſita per Æquationem $xx = ay$ facit, ſunt ejuſdem generis ac Circulares; & quos ſecunda $x^3 = byy$ ſunt ejuſdem generis ac Trochoïdales. Ac, tametſi Anguli Curvarum poſteriorum ſemper infinitè excedant Angulos præcedentium, tamen nunquam pervenire poſſunt ad magnitudinem Anguli rectilinei.

Eodem pacto Æquationes $x = y$, $xx = ay$, $x^3 = bby$, $x^4 = c^3y$, &c. denotant Seriem Linearum, quarum ſubſequentes faciunt

ciunt ad vertices cum Abſciſſis Angulos infinitè minores, iis quos faciunt præcedentes. Et quidem poſſunt inter Angulos Contactûs, quos faciunt duo ex his Curvarum generibus, fieri alii Anguli Contactûs ad infinitum, quorum alii aliis infinitè majores ſint.

Jam patet, quòd Anguli Contactûs unius generis ſunt infinitè majores, quàm Anguli cujuſvis alterius generis; quoniam Curva unius generis, quantùmvis magna ea ſit, tranſire nequit per Punctum Contactûs inter Tangentem & Curvam alterius generis quantumvis exigua ea ſit. Aut Angulus Contactûs unius generis neceſſariò nequit continere Angulum Contactûs alterius generis, ut totum partem continet. Sic, Angulus Contactûs Curvæ $x^4 = cy^3$, aut Angulus, quem ea facit cum Abſciſſâ, neceſſariò includit Angulum Contactûs Curvæ $x^3 = byy$, & nunquam in illo contineri poteſt: Nam Anguli, qui ſeſe mutuò poſſunt excedere, ſunt ejuſdem generis; ut accidit ſupra dictis Angulis Trochoïdis, & Curvæ, cujus natura exponitur per Æquationem $x^3 = byy$.

Et hinc apparet, quòd Curvæ poſſunt in aliquibus Punctis eſſe infinitè magis rectæ, vel infinitè magis curvæ, quàm Circulus quilibet, tametſi non ideò amittant formam Curvarum. Sed hæc tantùm obiter.

EXEMPL. V.

Sit (*Fig.* 21.) ED Quadratrix Circuli deſcripti Centro A; &, demiſſâ DB perpendiculari ad AE, pone AB $= x$, BD $= y$, & AE $= 1$. Tunc erit $x\dot{y} - yy\dot{y} - xx\dot{y} = y\dot{x}$, ut antea. Jam ſcribe, 1 pro $\dot{x}$, & z pro $\dot{y}$; & Æquatio evadet $xz - yyz - xxz = y$; & hinc, per Probl. I; habebis $z\dot{x} + x\dot{z} - yy\dot{z} - 2zy\dot{y} - xx\dot{z} - 2zx\dot{x} = \dot{y}$. Hinc autem, reducendo & rurſùs ponendo 1 pro $\dot{x}$, & z pro $\dot{y}$, erues $\dot{z} = \frac{2zzy + 2zx}{x - xx - yy}$. Et, cùm jam inveneris z & $\dot{z}$, fac $\frac{1 + zz}{\dot{z}} =$ DH, & age HC, ut ſupra. TAB. III.

Si

Si quæris Problematis Conſtructionem, eam valdè expeditam invenies. Age DP ad rectos Angulos ipſi DT, & quæ ſecet in P ipſam AT, & fac 2AP: AE :: PT : CH. Eſt enim $z = \left(\frac{y}{x - xx - yy} = \right)$ $\frac{BD}{-BT}$, & $zy = \frac{BDq}{-BT} = -BP$, ac $zy + x = -AP$, atque $\frac{2z}{x - xx - yy}$ in $zy + x = \frac{2BD}{AE \times BTq}$ in $-AP = \dot{z}$. Præterea, eſt $1 + zz = \frac{PT}{BT}$, (eſt enim $= 1 + \frac{BDq}{BTq} = \frac{DTq}{BTq}$,), & propterea $\frac{1 + zz}{\dot{z}} = \frac{PT \times AE \times BT}{-2BD \times AP} = DH$. Denique eſt BT : BD :: DH : HC $= \frac{PT \times AE}{-2AP}$. Ubi negativus valor tantùm oſtendit, quòd CH ſumi debet ex DH ad eaſdem partes ac AB.

Eádem ratione determinari poteſt breviſſimâ Computatione, Curvatura Spiralium, & aliarum Curvarum quarumcumque.

Quinimò hæc Methodus, (ut jam ſupra fecimus pro Tangentibus ducendis,) accomodari poteſt ad determinandam ſine prævià Reductione Curvaturam, quando Curvæ referuntur ad Rectas quovis alio pacto. Sed, quia omnes Curvæ, tùm geometricæ tùm etiam mechanicæ, (præcipuè cùm leges definientes expreſſæ ſunt per Æquationes infinitas, ut infra monſtrabimus,) referri poſſunt ad Ordinatas perpendiculares, ideò me ſatìs de hâc re dixiſſe puto.

Quæ præterea deſiderari poſſent, facilè quiſque proprio ingenio ſupplere poteſt; præſertim, poſtquam ad meliùs hoc argumentum illuſtrandum, addidero Methodum pro ſpiralibus.

TAB. IV. Sit (*Fig.* 22.) BK Circulus, A ejus Centrum, & B Punctum datum in Peripherià. Sit AD*d* Spiralis quælibet, DC ei ad rectos Angulos, & C Centrum Curvaturæ in Puncto D: Actâ Rectâ ADK, duc CG ei parallelam & æqualem, & inſuper Perpendicularem GF, quæ ſecet ipſam CD in F. Dic AB vel AK $= 1 =$ CG, BK $= x$, AD $= y$, & GF $= z$. Jam concipe Punctum D progredi in Spirali per infinitè exiguum Spatium D*d*; deinde per *d* age Semidiametrum A*k*, ac per C Rectam C*g* Semidiametro A*k* parallelam & æqualem, ac *gf* ipſi *g*C ad rectos Angulos. Juncta autem

autem Cd ſecet gf in f & GF in P; produc GF in ϕ, ita ut ſit $G\phi = gf$, & age de perpendicularem ad AK, quam produces donec ſecet CD in I. Jam eodem tempore genita Momenta ipſarum BK, AD, & $G\phi$ erunt Kk, De, & $F\phi$; quæ idcirco vocanda ſunt $o\dot{x}$, $o\dot{y}$, & $o\dot{z}$.

Nunc eſt $AK : Ae\,(AD) :: Kk : de = oy$, ubi aſſumo $\dot{x} = 1$, ut anteà. Pariter $CG : GF :: de : eD = oyz$, & idcirco $yz = \dot{y}$. Præterea, $CG : CF :: de : dD = oy \times CF :: Dd : dI = oy \times CFq$. Inſuper, quia Angulus $PC\phi$, (æqualis Angulo GCg,) æquat Angulum DAd; & Angulus $CP\phi$, (par Angulo CDI, æquali Angulis edD & Recto ſimul,) æquat Angulum ADd; Triangula $CP\phi$ & ADd ſimilia ſunt, ergo $AD : Dd :: CP\,(CF) : P\phi = o \times CFq$: Hinc aufer $F\phi$, & reſtabit $FP = o \times CFq - o \times \dot{z}$. Denique, demiſſâ CH perpendiculari ad AD, eſt $FP : dI :: CG : eH$ vel $HD = \frac{y \times CFq}{CFq - \dot{z}}$, aut, ſubſtituendo $1 + zz$ pro CFq, invenies $DH = \frac{y + yzz}{1 + zz - \dot{z}}$. Ubi obſervandum eſt, quòd, in hoc Computationis genere, pro æqualibus ſumo Quantitates, quarum, (velut hìc ipſarum AD & Ae,) Ratio infinitè parum differt ab Æqualitatis Ratione.

Hinc autem manat ſequens Regula. Cùm habes Æquatione expoſitam Relationem ipſarum x & y, quære Relationem Fluxionum $\dot{x}$ & $\dot{y}$ (per Probl. I.), & pone 1 pro $\dot{x}$ & yz pro $\dot{y}$: Deinde ex Æquatione ſic inventâ rurſus (per Probl. I.) erue Relationem inter $\dot{x}$, $\dot{y}$, & $\dot{z}$, atque iterum ſcribe 1 pro $\dot{x}$: Quod primò conficitur, per debitam Reductionem dabit $\dot{y}$ & z; &, quod ſecundò fit, dabit $\dot{z}$; quibus cognitis, ſume $DH = \frac{y + yzz}{1 + zz - \dot{z}}$, & educ Perpendicularem HC, quæ occurrit in C ipſi DC Perpendiculari ad Spiralem antea ductæ, eritque C Centrum Curvaturæ. Vel, (quod eòdem recidit,) fac $CH : HD :: z : 1$, & age CD.

Digitized by Google

Exempl. I.

Sit Æquatio $ax = y$, (quæ pertinet ad Spiralem *Archimedeam*), erit (per Probl. I.) $a\dot{x} = \dot{y}$, aut, (ſcriptis 1 pro $\dot{x}$, & yz pro $\dot{y}$,) $a = yz$. Et hinc rurſus (per Probl. I.) $0 = z\dot{y} + y\dot{z}$: Quapropter dato in Spirali quovis Puncto D, & ideò Rectâ AD vel y datâ magnitudine, dabuntur etiam $z = \frac{a}{y}$, & $\dot{z} = (-\frac{z\dot{y}}{y}$ aut$)$ $-\frac{az}{y}$: Quibus cognitis, fac $1 + zz - \dot{z} : 1 + zz :: AD\,(y) : DH$; & $1 : z :: DH : HC$.

Hinc ſponte fluit Conſtructio hæc. Produc AB in Q, ita ut ſit AB ad Arcum BK, ut Arcus BK ad BQ, & fac AB + AQ : AQ :: AD : DH :: a : HC.

Exempl. II.

Si $axx = y^3$ eſſet Æquatio determinans Relationem, quæ eſt inter BK & AD, haberes (per Probl. I.) $2ax\dot{x} = 3yy\dot{y}$, aut $2ax = 3y^2z$, & hinc rurſus $2a\dot{x} = 3y^2\dot{z} + 9zyy\dot{y}$; eſt igitur $z = \frac{2ax}{3y^2}$, & $\dot{z} = \frac{2a - 9zzy^2}{3y^2}$: His autem cognitis, fac $1 + zz - \dot{z} : 1 + zz ::$ AD : DH. Sive, opere ad optimam formam redacto, fac $9xx + 10 : 9xx + 4 ::$ AD : DH.

Exempl. III.

Eodem pacto, ſi Relatio ipſarum BK, AD definiretur Æquatione $axx - bxy = y^3$, invenires $\frac{2ax - by}{bxy + 3y^2} = z$, & $\frac{2a - 2bzy - bzzxy - 9zzy^2}{bxy + 3y^2} = \dot{z}$. Unde DH, & deinde Punctum C determinabuntur, ut ſuprà.

Et hâc ratione facilè determinabitur Curvatura quarumlibet aliarum

rum Spiralium, aut invenientur Regulæ pro quibuſcumque aliis Curvarum generibus, ad imitationem Regularum quas hactenus tradidimus.

Jamque perfecimus Problema hoc; ſed, cùm uſi ſimus Methodo ſatis diverſâ à vulgaribus Methodis, & cùm Problema ipſum ſit ex iis, quæ rariuſculè apud Geometras occurrunt, me rem ſupervacaneam facturum non exiſtimo, ſi ad illuſtrandam & confirmandam Solutionem allatam, tradam Specimen alterius; quæ magis obvia eſt, & minùs differt à vulgari Tangentium ducendarum Methodo.

Concipiatur ergo Circulus deſcriptus quovis Centro, & quovis Radio, ita ut ille Curvam ſecet in pluribus Punctis; Circulus ille, ſi contrahi aut dilatari intelligatur, donec duo ex his interſectionis Punctis coïncidant, ibi tanget Curvam. Et præterea, ſi ejus Centrum ſupponatur accedere ad Punctum Contactûs, aut ab eo recedere ut tertium interſectionis Punctum coeat cum primo in ipſo Contactûs Puncto; Circulus ille erit æquè curvus ac Curva in eodem Contactûs Puncto, ut innui in ultimâ ex quinque Centri Curvaturæ Proprietatibus ſupra allatis, & quarum quamlibet aſſerui viam aperire ad diverſimode Problema ſolvendum.

Quapropter (*Fig.* 23.) Centro C, Radio CD, deſcribatur Circulus ſecans Curvam in Punctis d, D, & δ; & demiſſis Perpendicularibus db, DB, $\delta\beta$, ac CF ad Abſciſſam AB. Dic $AB = x$, $BD = y$, $AF = u$, $FC = t$, & $CD = s$. Tunc erunt $BF = u - x$, & $BD + FC = y + t$. Summa Quadratorum ex his æquat Quadratum ex DC, id eſt, $uu - 2ux + xx + yy + 2ty + tt = ss$; quam expreſſionem breviorem ſi reddere velis, pone $uu + tt - ss = qq$ (ſymbolo ad arbitrium ſumpto), & Æquatio ſuperior fiet $xx - 2ux + yy + 2ty + qq = 0$. Nunc, poſtquam determinaveris t, u, & qq, habebis $s = \sqrt{uu + tt - qq}$. TAB. IV.

Jam proponatur Æquatio quæcumque ad definiendam Curvam, cujus Curvatura petitur. Hujus Æquationis ope potes ad arbitrium exterminare alterutram ex Quantitatibus x & y, & hinc prodibit Æquatio, cujus Radices, (db, DB, $\delta\beta$, ſi extermines x; & Ab, AB, $A\beta$, ſi extermines y,) ſunt ad interſectionis Puncta d, D, δ, &c. Harum tres cùm æquales evadunt, Circulus Curvam tangit, & præterea eundem habet Curvaturæ gradum ac Curva in Con-

Contactûs Puncto. Tres autem Radices æquales fient, ſi conferas hanc Æquationem cum alterâ fictitiâ eundem Dimenſionum numerum & tres Radices æquales habente, ut jam CARTESIUS monſtravit. Aut expeditiùs, ſi bis multiplices ejus Terminos per aliquam arithmeticam Progreſſionem.

EXEMPLUM.

Sit Æquatio $ax = yy$, (quæ eſt ad Parabolam). Exterminato x (id eſt, poſito in ſuperiore Æquatione pro x ejus valore $\frac{yy}{a}$), conſequeris aliam hìc infra poſitam, cujus Radices tres y reſtant æquales reddendæ. Ad quod perficiendum multiplico bis ejus Terminos, per Progreſſionem aliquam arithmeticam, ut hìc factum vides.

$$\begin{array}{cccccc} \frac{y^4}{aa} & * & -\frac{2u}{a}yy & +2ty & +qq & =0 \\ & & +yy & & & \\ 4 & * & 2 & 1 & 0 & \\ 3 & * & 1 & 0 & -1 & \\ \hline \end{array}$$

Hinc aſſequor $\frac{12y^4}{aa} \quad - \frac{4u}{a}yy + \quad 2yy \quad = 0$

aut $u = \frac{3yy}{a} + \frac{1}{2}a$, unde facilè infertur, quòd $BF = 2x + \frac{1}{2}a$, ut antea.

Dato igitur Puncto aliquo D in Parabolâ, age DP perpendicularem ad Curvam, & ſume in Axe $PF = 2AB$, erige FC ad rectos Angulos ipſi AF, quæ occurrat DP in C; erit C petitum Curvaturæ Centrum.

Idem perfici poteſt in Ellipſi & Hyperbolâ, ſed computatio erit ſatìs perplexa, &, in genere, pro aliis Curvis valde moleſta.

De

De Quæſtionibus quæ habent affinitatem quamdam cum Superiore Problemate.

Ex Reſolutione ſuperioris Problematis nonnulla alia poſſunt enodari, talia ſunt.

I.

Invenire punctum, in quo Curva datum habet Curvaturæ gradum.

Quæratur, *ex. gr.*, in Parabolâ $ax = yy$ punctum, in quo Radius Curvaturæ ſit datæ longitudinis f: Invento, ut ſupra, Centro Curvaturæ, determinabis Radium, quem invenies $= \frac{a+4x}{2a} \times \sqrt{aa+4ax}$; debet autem eſſe $= f$, ergo per Reductionem erit $x = -\frac{1}{4}a + \sqrt[3]{\frac{1}{16}aff}$.

I I.

Invenire punctum Rectitudinis.

Punctum *Rectitudinis* voco illud, in quo Radius Curvaturæ eſt infinitus, aut ejus Centrum ad infinitum intervallum. Hoc accidit ad Verticem Parabolæ $a^3x = y^4$. Illud idem punctum plerumque eſt Limes Flexûs contrarii, cujus determinationem ſupra tradidimus; ſed alia determinatio nec inelegans deduci poteſt ex hoc Problemate; ſcilicet: Quo major fit Radius Curvaturæ, eo minor (*Fig.* 19.) evadit Angulus D C d, & ſimul Momentum δf; ita ut Fluxio Quantitatis z minuatur cum illo, &, cùm Radius eſt infinitus, omnino evaneſcat. Quapropter quære Fluxionem $\dot{z}$, & eam pone æqualem nihilo. TAB. III.

Ut, ſi velles determinare Limitem Flexûs contrarii in Parabolâ ſecundi generis, cujus ope CARTESIUS conſtruit Æquationes ſex

Dimenſionum. Æquatio autem ad hanc Curvam eſt $x^3 - bxx - cdx + bcd + dxy = 0$. Hinc (per Probl. I.) oritur $3xx\dot{x} - 2bx\dot{x} - cd\dot{x} + dy\dot{x} + dx\dot{y} = 0$, quæ Æquatio, (ſcribendo 1 pro $\dot{x}$, & z pro $\dot{y}$,) evadit $3xx - 2bx - cd + dy + dxz = 0$; unde rurſus (per Probl. I.) $6x\dot{x} - 2b\dot{x} + d\dot{y} + dz\dot{x} + dx\dot{z} = 0$; hic iterum pone 1 pro $\dot{x}$ & z pro $\dot{y}$ & o pro $\dot{z}$, & habebis $6x - 2b + 2dz = 0$: Scribe in Æquatione $3xx - 2bx - cd + dy + dxz = 0$ pro dz ejus valorem $3x - b$, reperies $-bx - cd + dy = 0$, aut $y = c + \frac{bx}{d}$; qui valor, poſitus pro y in Æquatione ad Curvam, præbebit $x^3 + bcd = 0$, unde Limes Flexûs contrarii definietur.

Eodem pacto determinari poſſunt puncta Rectitudinis, quando non ſunt inter partes contrariè flexas. Exprimat Æquatio $x^4 - 4ax^3 + 6aaxx - b^3y = 0$ naturam Curvæ. Hinc habebis (per Probl. I.) $4x^3 - 12axx + 12aax - b^3z = 0$; & hinc rurſus $12xx - 24ax + 12aa - b^3\dot{z} = 0$. Jam ſuppono $\dot{z} = 0$, &
TAB. IV. per Reductionem aſſequor $x = a$. Abſcindo igitur (*Fig.* 24.) AB $= a$, & erigo Perpendicularem BD, quæ Curvæ occurret in D, Puncto Rectitudinis, ut petebatur.

III.

Invenire Punctum Curvaturæ infinitæ.

Quære Radium Curvaturæ, eúmque pone æqualem nihilo. Sic, in Parabolâ ſecundi generis, cujus Æquatio eſt $x^3 = ayy$, Radius eſt CD $= \frac{4a + 9x}{6a} \times \sqrt{4ax + 9xx}$, qui in nihilum evaneſcit, quando $x = 0$.

I V.

Determinare Punctum maximæ, vel minimæ Curvaturæ.

In hiſce Punctis Radius evadit omnium maximus, vel minimus; quapropter Centrum Curvaturæ in illo temporis momento, neque ad punctum Contactûs accedit, neque ab eo recedit: ſed planè ſtat immobile. Igitur, (*Fig.* 25.,) inventâ Fluxione Radii CD, ſive, breviùs, alterutrius BH vel AK, eam pone æqualem nihilo. TAB. IV.

Si Quæſtio, *ex. gr.*, proponeretur de Parabolâ ſecundi generis $x^3 = aay$: Priùs determina Centrum Curvaturæ. Invenies autem $DH = \frac{aa + 9xy}{6x}$, &idcirco $BH = \frac{aa + 15xy}{6x}$; Pone $BH = u$, ergo $\frac{aa}{6x} + \frac{5}{2}y = u$; itaque (per Probl. I.) $-\frac{aa\dot{x}}{6xx} + \frac{5}{2}\dot{y} = \dot{u}$. Nunc ſuppone $\dot{u}$ vel Fluxionem ipſius BH æqualem nihilo, & præterea, (quia per hypotheſim $x^3 = aay$, id eſt, per Probl. I. $3xx\dot{x} = aa\dot{y} = 3xx$, ponendo $\dot{x} = 1$,) ipſi $\dot{y}$ ſubſtitue $\frac{3xx}{aa}$, & reperies $45x^4 = a^4$. Itaque abſcinde $AB = a\sqrt[4]{\frac{1}{45}} = a \times 45^{-\frac{1}{4}}$, & ex B educta Perpendicularis BD occurret Curvæ in Puncto maximæ Curvaturæ. Sive, quod idem eſt, fac $AB : BD :: 3\sqrt{5} : 1$.

Eadem ratione (*Fig.* 26.) Hyperbola ſecundi generis, repræſentata Æquatione $xyy = a^3$, maximè inflexa erit ad Puncta D & *d*, quæ determinabis capiendo Abſciſſam $AQ = 1$, erigendo hinc Perpendicularem $QP = \sqrt{5}$, & inde Q*p* ei æqualem, & demum jungendo AP, A*p*, quæ Rectæ ſecabunt Curvam in quæſitis Punctis D & *d*. TAB. IV.

V.

Determinare locum Centri Curvaturæ, aut deſcribere Curvam, in quâ ſemper eſt hoc Centrum.

Supra demonſtravimus, quòd Centrum Curvaturæ Trochoïdis

 ſemper

ſemper invenitur in alterâ Trochoïde. Haud aliter Centrum Curvaturæ Parabolæ eſt in alterâ Parabolâ, ſed ſecundi generis, quæ exprimitur Æquatione $axx = y^3$, ut facilè computatio tibi monſtrabit.

VI.

Si Lux incidat in Curvam quamcumque, reperire Curvæ Focos; aut concurſum Radiorum, qui ab omnibus ejus Punctis Refringuntur.

Quære Curvaturam, quam habet Curva in hoc Puncto, ac Centro & Radio Curvaturæ deſcribe Circulum: Deinde quære concurſum Radiorum refractorum à Circulo circa hoc Punctum. Idem enim erit concurſus Radiorum refractorum à propoſitâ Curvâ.

Hic locus eſt addendi peculiarem Methodum determinandæ Curvaturæ ad Curvarum Vertices, quando eæ ſecant Abſciſſas ad rectos Angulos. Nam, Punctum, in quo Perpendicularis ad Curvam ſecans Abſciſſam, eam poſtremo ſecat eſt Centrum ipſum hujus Curvaturæ. Quare, cùm detur Relatio inter Abſciſſam x, & y Ordinatam, ad rectos Angulos connexas, atque ideo etiam (per Probl. I.) Relatio inter Fluxiones $\dot{x}$ & $\dot{y}$; valor ipſius $y\dot{y}$, poſtquam in eo poſueris 1 pro $\dot{x}$, & o pro y dabit Radium Curvaturæ.

Sic in Ellipſi $ax - \frac{a}{b}xx = yy$, eſt $\frac{a\dot{x}}{2} - \frac{a}{b}x\dot{x} = y\dot{y}$; qui valor $y\dot{y}$, (ſi ſupponas $y = 0$, & eâ de cauſâ $x = b$,) ſcribendo 1 pro $\dot{x}$, dat $\frac{1}{2}a$ æqualem Radio Curvaturæ. Eodem pacto ad Hyperbolæ & Parabolæ Vertices ſemper invenies Radium Curvaturæ æqualem ſemiſſi Lateris recti.

Eâdem ratione in Conchoïde definitâ per Æquationem $\frac{bbcc}{xx} + \frac{2bcc}{x} {+cc \atop -bb} - 2bx - xx = yy$, valor $y\dot{y}$ (inventus per

Probl.

Probl. I.) erit $-\frac{bbcc}{x^3}-\frac{bcc}{xx}-b-x$: Nunc, ſupponendo $y=0$, & idcirco $x=+c$ vel $-c$, habebis $-\frac{bb}{c}+2b-c$ aut $\frac{bb}{c}-2b+c$ pro Radio Curvaturæ: Fac (*Fig.* 6.) igitur AE: EG:: EG: EC, & *Ae*: *e*G :: *e*G: *ec*, ac Puncta C & *c*, erunt Centra Curvaturæ ad Vertices E & *e* Conchoïdum conjugatarum. TAB. I.

PROBL. VI.

Determinare Qualitatem Curvaturæ ad datum Punctum cujuſlibet Curvæ.

Per *Qualitatem* Curvaturæ intelligo ejus formam, ejus, ſcilicet, majorem vel minorem inæqualitatem, aut majorem vel minorem diverſitatem in Curvæ partibus diverſis. Sic, ſi quæras: Quænam eſt Qualitas Curvaturæ in Circulo? Reſpondeo quòd ea eſt uniformis vel invariabilis. Pariter, ſi quæratur quænam eſt Qualitas Curvaturæ in Spirali, quæ (*Fig.* 23.) deſcribitur motu Puncti D progredientis in AD ex A Motu accelerato, dum Recta AK fertur uniformi rotatione circa Centrum A, & cujus Puncti D Velocitas ita acceleretur, ut Recta AD habeat ad Arcum BK deſcriptum ex dato puncto B eandem Rationem ac Numerus ad ſuum Logarithmum; ſi, inquam, peteretur quænam eſt Qualitas Curvaturæ hujus Spiralis, reſpondendum eſſet eam eſſe uniformiter variam vel æquabiliter inæqualem. Et ſic aliæ Curvæ in diverſis Punctis dici poſſunt inæquabiliter inæquales juxta diverſitatem earum Curvaturæ. TAB. III.

Quæritur ergo Inæquabilitas aut Varietas Curvaturæ in ſingulis Curvæ Punctis: Ad quod obſervo.

I.

Quòd Curvæ, ubi ſimiles ſunt, habent in Punctis ſimiliter poſitis ſimilem Curvaturæ Inæquabilitatem aut Diverſitatem.

Q 3 II.

II.

Quòd Momenta Radiorum Curvaturæ in his Punctis, ſunt proportionalia eodem tempore natis Momentis Curvarum, & Fluxiones Fluxionibus.

III.

Quòd idcirco, ubi hæ Fluxiones non ſunt proportionales, ſimilis non eſt Inæquabilitas Curvaturæ.

Major enim eſt Inæquabilitas, quando major eſt Ratio quam Fluxio Radii Curvaturæ habet ad Curvæ Fluxionem; Quapropter hæc Fluxionum Ratio non ineptè dici poteſt *Index* Inæquabilitatis aut Varietatis Curvaturæ.

TAB. III. Ad Puncta (*Fig.* 19.) D & *d* infinitè proxima in Curvâ AD*d*, agantur Radii Curvaturæ DC & *dc*, &, ſi D*d* ſit Momentum Curvæ, erit C*c* eodem tempore genitum Momentum Radii Curvaturæ, & $\frac{Cc}{Dd}$ Index Inæquabilitatis Curvaturæ: Nam, eo major dici poteſt hæc Inæquabilitas, quo major eſt Quantitas Rationis $\frac{Cc}{Dd}$; vel eo diſſimilior ab uniformi Curvaturâ Circuli dici poteſt Curvatura hæc.

Jam, demiſſis DB & *db* ordinatim ad rectos Angulos Applicatis alicui Rectæ AB ſecanti DC in P, pone $AB = x$; $BD = y$; $DP = t$; $DC = u$, & ideo $Bb = o\dot{x}$, erítque $Cc = o\dot{u}$; & BD : DP :: B*b* : D*d* $= \frac{to\dot{x}}{y}$; ac $\frac{Cc}{Dd} = \frac{y\dot{u}}{t\dot{x}} = \frac{y\dot{u}}{t}$, ponendo $\dot{x} = 1$.

Cùm autem Relatio inter x & y exhibeatur per Æquationem aliquam, & hinc (juxta Probl. IV. & V.) inveniri poſſit Perpendicularis DP vel t, & Radius Curvaturæ u, ipſiúſque Radii Fluxio $\dot{u}$ (per Probl. I.;) datur ergo etiam $\frac{y\dot{u}}{t}$, Index Inæquabilitatis Curvaturæ.

EXEMPL.

Digitized by Google

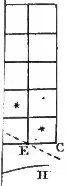


Fig. 2.

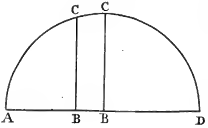


Fig. 4.

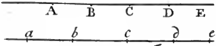


Fig. 5.

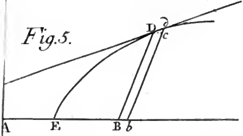
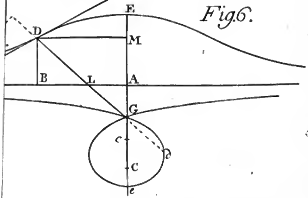


Fig. 6.



Digitized by Google

EXEMPL. I.

Sit Æquatio ad Parabolam $2ax = yy$. Tunc (per Probl. IV.) $BP = a$, ergo $DP = \sqrt{aa + yy} = t$. Item (per Probl. V.) $BK = a + 2x$; & $BP : PD :: BK : DC = \frac{at + 2tx}{a} = u$. Jam, Æquationes $2ax = yy$; $aa + yy = tt$; & $\frac{at + 2tx}{a} = u$, dant $2a\dot{x} = 2y\dot{y}$; $2y\dot{y} = 2t\dot{t}$; & $\frac{a\dot{t} + 2\dot{x}t + 2t\dot{x}}{a} = \dot{u}$. Has reduc, & pro $\dot{x}$ ſcribe 1, atque invenies $\dot{y} = \frac{a}{y}$; $\dot{t} = (\frac{y\dot{y}}{t}) = \frac{a}{t}$; & $\dot{u} = \frac{a\dot{t} + 2x\dot{t} + 2t}{a}$. Sic autem determinatis $\dot{y}$, $\dot{t}$, & $\dot{u}$, habebis $\frac{\dot{y}\dot{u}}{\dot{t}}$ Indicem Inæquabilitatis Curvaturæ.

Si, in Numeris, determinares quòd $a = 1$, aut $2x = yy$, & quòd $x = \frac{1}{2}$; tunc $y = (\sqrt{2x} =)\ 1$; $\dot{y} = (\frac{a}{y} =)\ 1$; $t = (\sqrt{aa + yy} =) \sqrt{2}$; $\dot{t} = (\frac{a}{t} =) \sqrt{\frac{1}{2}}$; & $\dot{u} = (\frac{a\dot{t} + 2x\dot{t} + 2t}{a} =)\ 3\sqrt{2}$. Igitur $\frac{\dot{y}\dot{u}}{\dot{t}} = 3$, qui Numerus eſt Index Inæquabilitatis.

Si verò ſtatuiſſes quòd $x = 2$, tunc $y = 2$; $\dot{y} = \frac{1}{2}$; $t = \sqrt{5}$; $\dot{t} = \sqrt{\frac{1}{5}}$; & $\dot{u} = 3\sqrt{5}$. Quamobrem $(\frac{\dot{y}\dot{u}}{\dot{t}} =)\ 6$ eſſet Index Inæquabilitatis.

Igitur Inæqualitas Curvaturæ, quâ prædita eſt Parabola in Puncto illo, ex quo demiſſa ad rectos Angulos ſuper Axem Ordinata, æqualis eſt recto Lateri, illius eſt duplex Inæqualitatis, quam habet eadem Curva ad Punctum, unde acta, ut ſupra, Ordinata æqualis eſt ſemiſſi Lateris recti, id eſt, Curvatura ad primum Punctum duplo magis differt à Circuli Curvatura, quàm Curvatura ad ſecundum Punctum.

EXEMPL.

Exempl. II.

Sit Æquatio $2ax - bxx = yy$, & (per Probl. IV.) eſt $a - bx = BP$; ergo $tt = aa - 2abx + bbxx + yy = aa - byy + yy$: Pariter (per Probl. V.) eſt $DH = y + \frac{y^3 - by^3}{aa}$; ubi, ſi pro $yy - byy$ ponas $tt - aa$, habebis $DH = \frac{tty}{a}$; Sed eſt BD : DP :: DH : $DC = \frac{t^3}{aa} = u$; Ac (per Probl. I.) Æquationes $2ax - bxx = yy$; $aa - byy + yy = tt$; & $\frac{t^3}{aa} = u$; dant $a - bx = y\dot{y}$; & $y\dot{y} - by\dot{y} = t\dot{t}$; ac $\frac{3tt\dot{t}}{aa} = \dot{u}$. Datur igitur $\dot{u}$; ergo etiam $\frac{y\dot{u}}{t}$ Index Inæquabilitatis Curvaturæ.

Sic in Ellipſi $2x - 3xx = yy$; in quâ eſt $a = 1$; & $b = 3$; ſi ponas $x = \frac{1}{2}$, erit etiam $y = \frac{1}{2}$: ſed $\dot{y} = -1$; $t = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\dot{t} = \sqrt{2}$; & $\dot{u} = 3\sqrt{\frac{1}{2}}$: quocirca $\frac{y\dot{u}}{t} = \frac{3}{2}$, quæ Fractio exponit Curvaturæ Inæquabilitatem. Hinc patet, quòd Inæquabilitas Curvaturæ, quam habet Ellipſis ad Punctum D hìc aſſignatum, eſt bis minùs inæquabilis, (vel bis ſimilior Curvaturæ Circuli,) quàm Curvatura Parabolæ ad ejus Punctum, ex quo demiſſa Ordinata ad Axem æquat ſemiſſem Lateris recti.

Si animus fert comparare Concluſiones, quas invenimus in his Exemplis, perſpicies, quòd in Parabolâ $2ax = yy$ eſt Index Inæquabilitatis $(\frac{y\dot{u}}{t} =) \frac{3y}{a}$, ſed in Ellipſi $2ax - bxx = yy$ habes $(\frac{y\dot{u}}{t} =) \frac{3y - 3by}{aa} \times BP$; unde in Hyperbolâ $2ax + bxx = yy$, ſervatâ Analogiâ, erit Index $(\frac{y\dot{u}}{t} =) \frac{3y + 3by}{aa} \times BP$. Unde liquet, quòd ad diverſa Puncta ſingularum Sectionum conicarum

Tab. II. *pag.* 128. *Tom. I.*

Fig. 8.

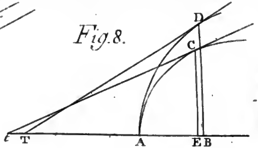


Fig. 10.

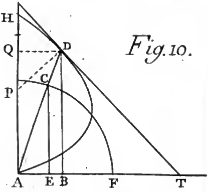
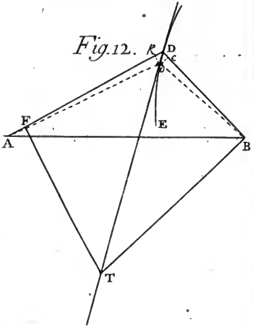


Fig. 12.



Digitized by Google

Digitized by Google

rum ſeorſum conſideratarum, Inæquabilitas Curvaturæ eſt ut rectangulum $BD \times BP$, & quòd ad varia Parabolæ Puncta eſt ut Ordinata BD.

Cùm autem Parabola ſit ſimpliciſſima Figurarum, quæ inæqualiter flectuntur, & cùm Inæqualitas Curvaturæ in illâ facilè determinetur, (eſt enim ejus Index $6 \times \frac{\text{Ordinatam}}{\text{Latere Recto}}$,), ideo Curvatura aliarum Curvarum non inconcinnè comparabitur cum hujus Curvaturâ.

Sic, ſi quæratur quænam eſt Curvatura Ellipſeos $2x - 3xx = yy$ ad illud Perimetri Punctum, quod determinatur aſſumptâ $x = \frac{1}{2}$: Quia hujus Curvaturæ Index eſt $\frac{3}{2}$, ut jam invenimus, reſponderi poteſt Curvaturam hanc ſimilem eſſe ei, quam habet Parabola $6x = yy$ ad Punctum illud, inter quod & Axem, Ordinata ad rectos Angulos par eſt $\frac{3}{2}$.

Haud ſecus, (*Fig.* 15.) cùm Fluxio Spiralis ADE ſit ad Fluxionem Subtenſæ AD in aliquâ datâ Ratione, puta, ut d eſt ad e; ejus Concavitatem verſùs age $AP = \frac{e}{\sqrt{dd - ee}} \times AD$ & Perpendicularem ipſi AD; atque erit P Centrum Curvaturæ, & $\frac{AP}{AD}$ aut $\frac{e}{\sqrt{dd - ee}}$ Index Inæquabilitatis: Quapropter hæc Spiralis habet ubique Curvaturam ſimiliter inæquabilem, ut Parabola $6x = yy$ eam habet in Puncto, ex quo ducta ad rectos Angulos Ordinata ad Axem æqualis eſt Quantitati $\frac{e}{\sqrt{dd - ee}}$. TAB. III.

Eâdem ratione (*Fig.* 20.) Index Inæquabilitatis ad Trochoïdis Punctum D invenietur $\frac{AB}{BL}$. Igitur ejus Curvatura ad idem Punctum D eodem pacto inæquabilis eſt, aut eodem pacto differt à Circulo ac Curvatura cujuſvis Parabolæ $ax = yy$ ad Punctum, ubi Ordinata eſt $= \frac{1}{6} a \times \frac{AB}{BL}$. TAB. IV.

His, opinor, ſenſus Problematis ſatis explanatus eſt; eo autem benè perſpecto, quilibet, qui obſervet Series rerum ſupra traditarum, poterit ſibimet ipſe plura ſuppeditare Exempla, & invenire plures operandi Methodos ab hiſce diverſas, prout occaſio poſtulabit. Ita ut ei non admodum difficilis, ſive potiùs omnino facilis ſit futura, (dummodo faſtidium illi non faciant computationis tædium & ambages,) Solutio Problematum ejuſdem naturæ, puta.

I.

Invenire in quâvis Curvâ Punctum, ubi Inæquabilitas Curvaturæ eſt aut nulla, aut infinita, aut omnium maxima vel minima.

Sic Inæquabilitas nulla eſt ad Sectionum conicarum Vertices, infinita ad Trochoïdis Cuſpides, maxima ad ea Ellipſeos Puncta, ad quæ Rectangulum $BD \times BP$ eſt omnium maximum, id eſt, ad quæ Ellipſis ſecatur à Diagonalibus Parallelogrammi ita circumſcripti, ut Latera tangant præcipuos Curvæ Vertices.

II.

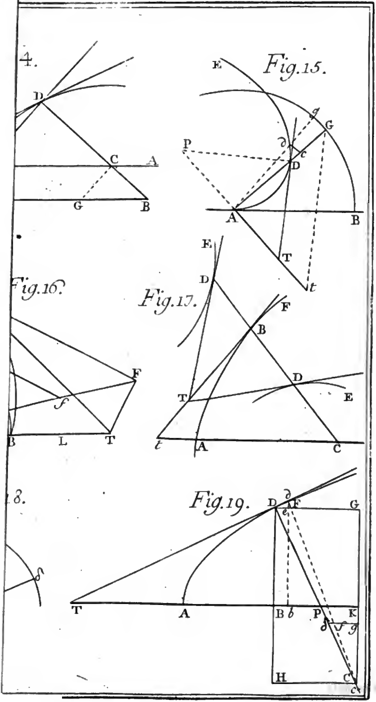
Determinare Curvam certæ alicujus Speciei, puta, Sectionem conicam, cujus Curvatura ad datum Punctum ſit æqualis & ſimilis Curvaturæ alterius cujuſvis Curvæ ad datum Punctum.

III.

Determinare conicam Sectionem, ad cujus quodcumque Punctum Curvatura & poſitio Tangentis, (reſpectivè ad Axem,) ſimiles ſint Curvaturæ & Tangentis poſitioni alterius cujuſque Curvæ ad datum Punctum.

Utilitas hujus Problematis in eo verſatur, quod ſic pro Ellipſibus ſecundi generis, quarum proprietates ad Lucis Refractionem pertinentes explicatæ fuerunt à CARTESIO in *Geometriâ* ſuâ, uſurpari poſſunt Sectiones conicæ, quæ idem ferè prorſus efficient. Quod intelligendum eſt de ceteris Curvis.

PROBL.


4.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
8.
Fig. 19.

Digitized by Google

Probl. VII.

Reperire quotlibet Curvas, quarum Area poſſint exhiberi finitâ Æquatione.

Sit (*Fig.* 27.) AB Abſciſſa Curvæ, è cujus Vertice A demittatur Perpendicularis AC $= 1$, deinde agatur CE Parallela AB. Præterea, ſit BD ordinatim Applicata ad rectos Angulos, quæ occurrat Rectæ CE in E & Curvæ AD in D. Intellige Areas ACEB & ADB generari motu Rectarum EB & BD decurrentium Rectam AB: Tunc harum Arearum Incrementa vel Fluxiones erunt ſemper ut Lineæ deſcribentes EB & BD. Fac igitur Parallelogrammum ACEB, aut AB $\times 1 = x$, & Area Curvæ ADB dicatur $= z$, & Fluxiones $\dot{x}$ ac $\dot{z}$ erunt ut BE & BD, ita ut, ſi ponas $\dot{x} = 1 =$ EB, ſit $\dot{z} =$ BD. TAB. V.

Aſſumptâ nunc Æquatione arbitrariâ, quâ determinetur Relatio ipſarum x & z, ex eâ (per Probl. I.) eruetur $\dot{z}$; igitur habebuntur duæ Æquationes, quarum una determinabit Curvam, altera verò Aream.

Exempla.

Sume $xx = z$, unde (per Probl. I.) $2\dot{x}x = \dot{z}$, aut, (quia $\dot{x} = 1$,) $2x = \dot{z}$.

Pone $\frac{x^3}{a} = z$, hinc oritur $\frac{3xx}{a} = \dot{z}$, Æquatio ad Parabolam.

Sit $ax^3 = zz$, aut $a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = z$, unde conficietur $\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \dot{z}$, aut $\frac{9}{4} ax = \dot{z}\dot{z}$, Æquatio pariter ad Parabolam.

Aſſume $a^6 x^{-2} = zz$, aut $a^3 x^{-1} = z$, & habebis $-a^3 x^{-2} = \dot{z}$, aut $a^3 + xx\dot{z} = 0$. Ubi valor negativus ipſius

z tantùm indicat quòd BD ſumi debet ad partes contrarias, relativè ad BE.

Item, ſi capias $aacc + ccxx = zz$, aſſequeris $2ccx = 2z\dot{z}$, unde, eliminato ſymbolo z, erues $\frac{cx}{\sqrt{aa+xx}} = \dot{z}$.

Vel, ſi ponas $\frac{aa+xx}{b} \times \sqrt{aa+xx} = z$, fac $\sqrt{aa+xx} = u$, eritque $\frac{u^3}{b} = z$, atque hinc (per Probl. I.) $\frac{3uu\dot{u}}{b} = \dot{z}$: Atqui Æquatio $aa+xx = uu$ dat $2x = 2u\dot{u}$; cujus ope ſi extermines $\dot{u}$, invenies $\frac{3ux}{b} = \dot{z} = \frac{3x}{b}\sqrt{aa+xx}$.

Si demum aſſumas $8 - 3xz + \frac{2}{5}z = zz$, obtinebis $-3z - 3x\dot{z} + \frac{2}{5}\dot{z} = 2z\dot{z}$, quapropter, ex aſſumptâ Æquatione primò quærenda eſt Area z, & deinde Ordinata $\dot{z}$, ex Æquatione quæ ſuboritur.

Et ſic ex Areis ad libitum fictis ſemper determinare licet Ordinatas, ad quas pertinent.

PROBL. VIII.

Invenire quotlibet Curvas quarum Area ad Aream cujuſcumque data Curva habeant Relationem expoſitam finitâ Æquatione.

TAB. V. Curva data (*Fig.* 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35.) ſit FDH, & GEI Curva petita. Concipe earum Ordinatas BD, & EC moveri ad rectos Angulos per earum Abſciſſas vel Baſes AB, & AC. Tunc, Incrementa vel Fluxiones Arearum hoc modo deſcriptarum, erunt ut hæ Ordinatæ ductæ in Velocitates quibus feruntur, videlicet in reſpectivarum Abſciſſarum Fluxiones. Pone igitur $AB = x$, $BD = u$, $AC = z$, atque $CE = y$; Aream verò $AFDB = s$, & Aream $AGEC = t$: Harumque Arearum Fluxiones ſint $\dot{s}$, & $\dot{t}$; at-

$\dot t$; atque erit $u\dot x : y\dot z :: \dot s : \dot t$; quamobrem, ſi ponas $\dot x = 1$, & $u = \dot s$ ut antea, reſtabit $y\dot z = \dot t$, & $\frac{\dot t}{\dot z} = y$.

Idcirco aſſumantur duæ Æquationes, quarum una exprimat Relationem Arearum s, & t, & altera Relationem Abſciſſarum ad eas pertinentium x, & z: Ex his Æquationibus erue (per Probl. I.) Fluxiones $\dot t$ & $\dot z$, & deinde fac $\frac{\dot t}{\dot z} = y$.

EXEMPL. I.

Data Curva FDH ſit Circulus expreſſus Æquatione $ax - xx = uu$, & quærantur aliæ Curvæ quarum Areæ ſint æquales Areæ Circuli. Eſt ergo, per hypotheſin, $s = t$, & propterea $\dot s = \dot t$; ac $y = \frac{\dot t}{\dot z} = \frac{u}{\dot z}$. Supereſt $\dot z$, quæ determinanda eſt aſſumptâ aliquâ Relatione inter Abſciſſas x, & z.

Suppone, *ex. gr.*, quòd $ax = zz$, tunc (per Probl. I.) $a = 2z\dot z$; Igitur, (ipſi $\dot z$ ſubſtituendo $\frac{a}{2z}$,) $y = \frac{u}{\dot z}$ fiet $= \frac{2uz}{a}$: Sed $u = (\sqrt{ax - xx} =) \frac{z}{a}\sqrt{aa - zz}$, ergo $\frac{2zz}{aa} \times \sqrt{aa - zz} = y$ eſt Æquatio ad Curvam, cujus Area æquat Aream Circuli.

Pariter, poſito quòd $xx = z$, hinc oritur $2x = \dot z$, & ideo $y = \left(\frac{u}{\dot z}\right) \frac{u}{2x}$; unde, exterminatis u & x, excudes $y = \frac{\sqrt{az^{\frac{1}{2}} - z}}{2z^{\frac{1}{2}}}$.

Sed ſi $cc = xz$, eſſet $0 = z + x\dot{z}$, & $-\frac{ux}{z} = y = -\frac{c^3}{z^3}\sqrt{az - cc}$.

Pariter, ſuppoſitâ Æquatione $ax + \frac{s}{1} = z$, eſſet (per Probl. I.) $a + \dot{s} = \dot{z}$, & idcirco $\frac{u}{a + \dot{s}} = y = \frac{u}{a + u}$, quæ Æquatio eſt ad mechanicam Curvam.

Exempl. II.

Iterum detur Circulus $ax - xx = uu$, & petantur Curvæ, quarum Areæ ſint ad Aream Circuli in quâcumque aliâ aſſumptâ Ratione. Ut, ſi poneres $cx + s = t$, ac $ax = zz$, eſſet (per Probl. I.) $c + \dot{s} = \dot{t}$, ac $a = 2z\dot{z}$: Quocirca $y = \frac{\dot{t}}{\dot{z}} = \frac{2cz + 2z\dot{s}}{a}$; &, ponendo $\sqrt{ax - xx}$ pro $\dot{s}$ & $\frac{zz}{a}$ pro x, eſſet $y = \frac{2cz}{a} + \frac{2zz}{aa}\sqrt{aa - zz}$.

Sed, ſi aſſumeres $s - \frac{2u^3}{3a} = t$, & $z = x$, haberes $\dot{s} - \frac{2uu\dot{u}}{a} = \dot{t}$, ac $1 = \dot{z}$: Quâ de cauſâ $y = \frac{\dot{t}}{\dot{z}} = \dot{s} - \frac{2uu\dot{u}}{a}$, aut $= u - \frac{2uu\dot{u}}{a}$. Jam, ad exterminandum $\dot{u}$, reſume Æquationem $ax - xx = uu$, quæ (per Probl. I.) dat $a - 2x = 2u\dot{u}$; ergo $y = \frac{2ux}{a}$; unde, ſi elimines u & x ſubſtituendo earum valores $\sqrt{vx - xx}$ & z, fiet $y = \frac{2z}{a} \times \sqrt{az - zz}$.

Quòd

Quòd ſi cepiſſes $ss = t$, & $x = zz$ inveniſſes $2s\dot{s} = \dot{t}$, & $\dot{x} = 2z\dot{z}$, & propterea $y = \frac{\dot{t}}{\dot{z}} = 4sz\dot{s}$; &, ſcribendo pro s & x, $\sqrt{ax - xx}$ ac zz, conficitur $y = 4szz \times \sqrt{a - zz}$ Æquatio ad Curvam mechanicam.

Exempl. III.

Eâdem ratione poſſunt inveniri Figuræ, quæ habeant aſſumptam Relationem ad aliquam aliam datam Figuram. Detur Hyperbola $cc + xx = uu$; ſi aſſumas $s = t$, & $xx = cz$, habebis $\dot{s} = \dot{t}$, & $2x = c\dot{z}$, igitur $y = \frac{\dot{t}}{\dot{z}} = \frac{cs}{2x}$: Jam, ſubſtitue $\sqrt{cc + xx}$ pro $\dot{s}$, & $c^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}$ pro x; erit $y = \frac{c}{2z}\sqrt{cz + zz}$.

Haud aliter, ſi ponas $xu - s = t$, & $xx = cz$, reperies $u + x\dot{u} - \dot{s} = \dot{t}$, & $2x = c\dot{z}$; ſed $u = \dot{s}$, ergo $x\dot{u} = \dot{t}$. Quapropter $y = \frac{\dot{t}}{\dot{z}} = \frac{c\dot{u}}{z}$: Atqui Æquatio $cc + xx = uu$, dat $\dot{x} = u\dot{u}$ (per Probl. I.), eſt igitur $y = \frac{cx}{2u}$; quæ Æquatio, ponendo $\sqrt{cc + xx}$ pro u, & $c^{\frac{1}{2}} \cdot z^{\frac{1}{2}}$ pro x, evadit $y = \frac{cz}{2\sqrt{cz + zz}}$.

Exempl. IV.

Quinimo, ſi Ciſſois $\frac{xx}{\sqrt{ax - xx}} = u$ eſſet data Figura, cui comparanda Figura peteretur; & ſi, ad hoc perficiendum aſſumeres $\frac{x}{3}\sqrt{ax - xx} + \frac{2}{3}s = t$ ſuppone $\frac{x}{3}\sqrt{ax - xx} = b$, & hujus Fluxionem pone $\dot{b}$; erit igitur $\dot{b} + \frac{2}{3}\dot{s} = \dot{t}$. Sed Æqua-

tio

tio $\frac{ax^3 - x^4}{9} = hh$, dat $\frac{3axx - 4x^3}{9} = 2h\dot{h}$, & propterea, (exterminando h,) $\frac{3ax - 4xx}{6\sqrt{ax - xx}} = \dot{h}$. Præterea, quia $\frac{2}{3}\dot{s} = \frac{2}{3}\dot{u}$ $= \frac{4xx}{6\sqrt{ax - xx}}$, erit $\frac{ax}{2\sqrt{ax - xx}} = \dot{t}$. Nunc determinaturus z & $\dot{z}$ aſſume $\sqrt{aa - ax} = z$; unde (per Probl. I.) $-a = 2z\dot{z}$, aut $\dot{z} = -\frac{a}{2z}$. Quapropter eſt $y = (-\frac{\dot{t}}{\dot{z}} = -\frac{zx}{\sqrt{ax - xx}} = \sqrt{\frac{zzx}{a - x}} = \sqrt{ax} =) \sqrt{aa - zz}$. Cùm autem Æquatio hæc ſit ad Circulum, hìc habes Relationem inter Areas Circuli, & Ciſſoidis.

Quòd ſi aſſumpſiſſes $\frac{2x}{3}\sqrt{ax - xx} + \frac{1}{3}s = t$, & $x = z$, hinc dimanâſſet $y = \sqrt{az - zz}$; Æquatio rurſus ad Circulum.

Eâdem ratione, ſi daretur aliqua Curva mechanica, poſſent reperiri aliæ Curvæ mechanicæ priori conferendæ.

Sed ad inveniendas Curvas geometricas, optimum erit ex Rectis, quæ geometricè altera ab alterâ dependent, aliquam ſumere pro Baſi, vel Abſciſſâ; & Aream, quæ complet Parallelogrammum, inveſtigare, ponendo ejus Fluxionem æquivalere Abſciſſæ ductæ in Fluxionem Ordinatæ.

EXEMPL. V.

TAB. IV. Sic (*Fig.* 20.) propoſitâ Trochoïde ADF, eam refero ad Abſciſſam AB; &, completo Parallelogrammo ABDG, inveſtigo Superficiem complentem ADG, eam ſupponendo deſcriptam motu Rectæ GD, & idcirco ejus Fluxionem æquivalentem Lineæ GD ductæ in Velocitatem Motûs ſui, id eſt $= x \times \dot{u}$. Nunc, quia AL parallela eſt Tangenti DT, eſt AB ad BL, ut Fluxio ejuſdem AB ad Fluxionem Ordinatæ BD, videlicet ut 1 ad $\dot{u}$. Quocirca $\dot{u}$ =

$= \frac{BL}{AB}$, & ideo $x\dot{u} = BL$. Ergo Area ADG deſcribitur Fluxione BL; &, quia eâdem Fluxione deſcribitur Area circularis ALB, hæc illi æqualis eſt.

Eodem pacto, ſi concipias ADF eſſe Figuram Arcuum, aut Sinuum verſorum, ea ſcilicet, cujus Ordinata BD æqualis eſt Arcui AL; Cùm Fluxio Arcûs AL ſit ad Fluxionem Abſciſſæ AB, ut PL ad LB; id eſt, cùm ſit $\dot{u} : 1 :: \frac{1}{2}a : \sqrt{ax - xx}$, & propterea $\dot{u} = \frac{a}{2\sqrt{ax - xx}}$, erit $x\dot{u}$, Fluxio Areæ ADG $= \frac{ax}{2\sqrt{ax - xx}}$: Quocirca Recta æqualis Quantitati $\frac{ax}{2\sqrt{ax - xx}}$ ſi concipiatur applicata, tanquam Ordinata perpendicularis ad Punctum aliquod B Rectæ AB, terminabitur certâ Curvâ geometricâ, cujus Area contigua Abſciſſæ AB æqualis eſt Areæ ADG.

Et ſic inveniri poſſunt Figuræ geometricæ, æquales aliis Figuris effictis Applicatione (ſub quovis Angulo) Arcuum Circuli, Hyperbolæ, aut alterius cujuſcumque Curvæ, ad Sinus rectos, aut verſos horum Arcuum, aut ad aliam quamlibet Rectam, quæ poſſit geometricè determinari.

In Spiralibus breviſſimum eſt negotium. Nam (*Fig. 36.*) ex TAB. VI.
Rotationis Centro A deſcribe quolibet Radio Arcum DG, qui ſecet Rectam AF in G, & Spiralem in D; quia hic Arcus, tanquam Linea, quæ fertur per Abſciſſam AG, deſcribit Spiralis Aream AHDG, ita ut Fluxio hujus Areæ ſit ad Fluxionem Rectanguli $1 \times AG$, ut Arcus GD eſt ad 1, ideo Recta perpendicularis GL æqualis huic Arcui, eodem pacto peragrans eandem Lineam AG deſcribet Aream A*l*LG æqualem Areæ AHDG; & Curva A*l*L erit geometrica. Præterea, ſi ducatur ſubtenſa AL, erit Triangulum $ALG = \frac{1}{2} AG \times GL = \frac{1}{2} AG \times GD =$ Sectori AGD. Igitur Segmenta complentia AL*l* & ADH erunt etiam æqualia. Et hæc non ſolum conveniunt *Spirali Archimedea*, (in quâ Hypotheſi A*l*L eſt *Parabola Apolloniana*) ſed cuicumque alteri; ita ut

quævis earum converti eâdem facilitate poſſit in æquales Geometricas Curvas.

Poteram attuliſſe plura ſpecimina Conſtructionum hujus Problematis, ſed hæc ſufficient; ſunt enim adeo generalia, ut, quæcunque hactenus inventa ſunt, aut (opinor) inveniri poſſunt de Curvaram Areis, aliquo pacto in his contineantur, & per hæc determinari poſſint, plerumque ſine ſolitis ambagibus, & perplexitatibus.

Præcipua verò utilitas hujus, & præcedentis Problematis in eo ſita eſt, quòd aſſumptis conicis Sectionibus, aut quibuſvis aliis Curvis cognitæ magnitudinis, invenire licet alias Curvas, quæ cum iis comparari poſſunt, & earum Æquationes ordine diſponi in Catalogo, ſeu Tabulâ. Conſtructâ autem hac Tabulâ, quando invenienda eſt Area Curvæ alicujus, perſpiciendum eſt utrùm Æquatio definiens ejus naturam, vel immediatè ſit in hac Tabulâ, vel ſaltem transformari poſſit in aliam, quæ ibi ſit; quod ſi accidit, datur hæc Area. Inſuper Catalogus, aut Tabula hæc applicari poteſt ad determinandas Curvarum Longitudines; ad invenienda earum Centra Gravitatis; Solida genita earum rotatione; Superficies horum Solidorum, & quaſvis alias Fluentes Quantitates generatas Fluxionibus huic analogis.

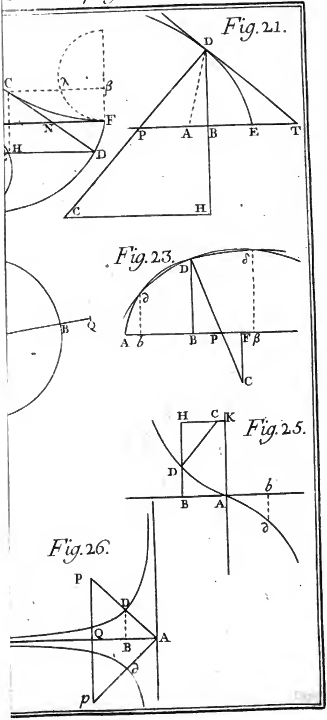
PROBL. IX.

Determinare Aream cujuſcunque Curvæ propoſitæ.

Hujus Problematis Reſolutio hinc pendet, quòd ex datâ Fluxionum Relatione, poteſt inveniri Fluentium Ratio, (ut in Probl. II.).

TAB. V. Et primò quidem, ſi (*Fig.* 27.) recta Linea B D, cujus Motu deſcribitur Area quæſita A F D B, fertur ad rectos Angulos ſuper Abſciſſam A B poſitione datam; intellige, (ut antea,) Parallelogrammum A B E C eodem tempore deſcribi ultra A B à Lineâ, quæ Unitatem æquet. Et, poſito, quòd B E ſit Fluxio hujus Parallelogrammi; erit B D Fluxio Areæ quæſitæ.

Fac igitur AB $= x$; & pariter ABEC $= 1 \times x = x$; ac BE $= \dot{x}$; Item, voca Aream A F D B $= z$; eritque BD $= \dot{z}$; quinetiam $= \frac{\dot{z}}{\dot{x}}$



Digitized by Google

$\frac{\dot z}{\dot x}$, quia $\dot x = 1$. Igitur Æquatio exprimens BD, unà exprimit Rationem Fluxionum $\frac{\dot z}{\dot x}$, & hinc (per Problematis I. Caſ. I.) poteſt excudi Relatio Fluentium x, & z.

Exempl. I.

Quando BD, *aut* $\dot z$, *æquat aliquam ſimplicem Quantitatem.*

Detur $\frac{xx}{a} = \dot z$, aut $= \frac{\dot z}{\dot x}$ (Æquatio ad Parabolam), hinc (per Probl. II.) conficietur $\frac{x^3}{3a} = z$. Quapropter $\frac{x^3}{3a}$, aut $\frac{1}{3}$ AB×BD æquat Aream Parabolæ AFDB.

Proponatur $\frac{x^3}{aa} = \dot z$ (Æquatio ad Parabolam ſecundi generis), hinc habebimus $\frac{x^4}{4aa} = z$; videlicet $\frac{1}{4}$ AB × BD eſt Area AFDB.

Sit $\frac{a^3}{xx} = \dot z$, aut $a^3x^{-2} = \dot z$ (Æquatio ad Hyperbolam ſecundi generis), ex eâ eruetur $-a^3x^{-1} = z$, aut $-\frac{a^3}{x} = z$. Rectangulum nempe (*Fig.* 37.) AB×BD æquat Aream HDBH TAB. VI. in infinitum extenſam, & jacentem ultra Ordinatam BD, ut inſinuat negativus ejus valor.

Eodem pacto, ſi daretur, $\frac{a^4}{x^3} = \dot z$, aſſequeremur $-\frac{a^4}{2xx} = z$.

Quinimo propoſita Æquatio $ax = \dot z\dot z$, (quæ rurſus pertinet

ad Parabolam), id eſt $a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \dot{z}$, ſuppeditat $\frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = z$, ſcilicet $\frac{2}{3}$ AB × BD = Areæ AFDB.

Sed $\frac{a^3}{x} = \dot{z}\dot{z}$; dat $+ 2 a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} = z$, aut 2 AB × BD = AFDB.

Sed $\frac{a^5}{x^3} = \dot{z}\dot{z}$; gignit $- \frac{2a^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = z$, ſive 2 AB × BD = HDBH.

Denique $axx = \dot{z}^3$; præbet $\frac{3}{5} a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{5}{3}} = z$; videlicet $\frac{3}{5}$ AB×BD = AFDB.

E x e m p l. II.

Quando $\dot{z}$ æquat Aggregatum ex ſimplicibus Quantitatibus.

Sit $x + \frac{xx}{a} = \dot{z}$; erit $\frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3a} = z$.

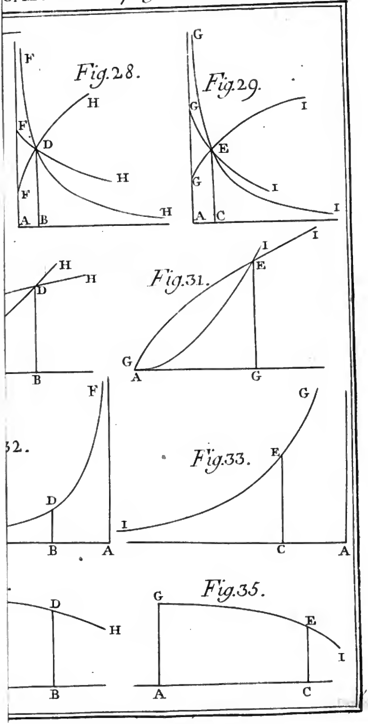
Detur $a + \frac{a^3}{xx} = \dot{z}$; habebimus $ax - \frac{a^3}{x} = z$.

Proponatur $3x^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{xx} - \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} = \dot{z}$; hinc exſurget $2x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{x} - 4x^{\frac{1}{2}} = z$.

E x e m p l. III.

Ubi Reductio *per* Diviſionem *præmittenda eſt.*

Detur $\frac{aa}{b+x} = \dot{z}$ (Æquatio ad Hyperbolam *Apollonianam*), & Diviſione in infinitum peractâ, fiet $\dot{z} = \frac{aa}{b} - \frac{aax}{bb} + \frac{aax}{b^3}$



Digitized by Google

$-\frac{aax^3}{b^4}$; &c. Et hinc (per Probl. II.), ut in ſecundâ Exemplorum congerie, obtinebis $z = \frac{aax}{b} - \frac{aaxx}{2bb} + \frac{aax^3}{3b^3} - \frac{aax^4}{4b^4}$; &c.

Proponatur $\frac{1}{1+xx} = \dot{z}$, erit, per Diviſionem, $\dot{z} = 1 - xx + x^4 - x^6$; &c, aut etiam $\dot{z} = \frac{1}{xx} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6}$; &c. Quapropter (per Probl. II.) $z = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$; &c. $=$ AFDB; aut $z = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5}$; &c. $=$ HDBH.

Sit $\frac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}-3x} = \dot{z}$; Diviſio ſuppeditabit $\dot{z} = 2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 7x^{\frac{3}{2}} - 13xx + 34x^{\frac{5}{2}}$; &c. Et hinc (per Probl. II.) erit $z = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - xx + \frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{13}{3}x^3 + \frac{68}{7}x^{\frac{7}{2}}$; &c.

EXEMPL. IV.

Ubi prævia Reductio *per* Extractionem Radicis *requiritur.*

Detur $\dot{z} = \sqrt{aa+xx}$ (, Æquatio ad Hyperbolam,) cujus Radix extracta, ad infinitam Terminorum multitudinem, dat $\dot{z} = a + \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{112a^7}$; &c., unde, ut ſupra, $z = ax + \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} + \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1008a^7}$; &c.

Eodem pacto, ſi proponeretur Æquatio (ad Circulum) $\dot{z} = \sqrt{aa-xx}$, ea ſuppeditaret $z = ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1008a^7}$; &c.

Et ſi haberemus $\dot{z} = \sqrt{x - xx}$ (Æquatio iterum ad Circulum) per Radicis Extractionem exſurgeret $\dot{z} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16} x^{\frac{7}{2}}$; &c. Et idcirco $z = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28} x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72} x^{\frac{9}{2}}$; &c.

Sic $\dot{z} = \sqrt{aa + bx - xx}$ (Æquatio pariter ad Circulum) ſuppeditat, per Radicis Extractionem, $\dot{z} = a + \frac{bx}{2a} - \frac{xx}{2a} - \frac{bbxx}{8a^3}$; &c. Hinc autem conficitur $z = ax + \frac{bxx}{4a} - \frac{x^3}{6a} - \frac{bbx^3}{24a^3}$; &c.

Sic etiam $\sqrt{\frac{1 + axx}{1 - bxx}} = \dot{z}$, dat per debitam Reductionem

$$\begin{aligned} \dot{z} = 1 + \tfrac{1}{2}\, b\,xx &+ \tfrac{3}{8}\, bb\, x^4;\ \&c. \\ + \tfrac{1}{2}\, a\quad &+ \tfrac{1}{4}\, ab\ ;\ \&c. \\ &- \tfrac{1}{8}\, aa\ ;\ \&c. \end{aligned}$$

unde fit

$$\begin{aligned} z = x + \tfrac{1}{6}\, b\,x^3 &+ \tfrac{3}{40}\, bb\, x^5;\ \&c. \\ - \tfrac{1}{6}\, a\quad &+ \tfrac{1}{20}\, ab\ ;\ \&c. \\ &- \tfrac{1}{40}\, aa\ ;\ \&c. \end{aligned}$$

Sic demum $\dot{z} = \sqrt[3]{a^3 + x^3}$ per Extractionem cubicæ Radicis, dat $\dot{z} = a + \frac{x^3}{3aa} - \frac{x^6}{9a^5} + \frac{5x^9}{81a^8}$; &c., quapropter (per Probl. II.) eſt $z = ax + \frac{x^4}{12aa} - \frac{x^7}{63a^5} + \frac{x^{10}}{162a^8}$; &c. $=$ AFDB.

Aut

Aut etiam $\dot{z} = x + \frac{a^3}{3xx} - \frac{a^6}{9x^5} + \frac{5a^9}{81x^8}$; &c., unde $z = \frac{1}{2} \times xx - \frac{a^3}{3x} + \frac{a^6}{36x^4} - \frac{5a^9}{567x^7}$; &c. $=$ HDBH.

E x e m p l. V.

Quando Æquatio per Solutionem affectæ Æquationis *præparanda eſt.*

Si Curva definiretur Æquatione $\dot{z}^3 + aa\dot{z} + ax\dot{z} - 2a^3 - x^3 = 0$; Extrahe Radicem, & invenies $\dot{z} = a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512aa}$; &c., unde obtinebis, Methodo jam ſæpius uſurpatâ, $z = ax - \frac{xx}{8} + \frac{x^3}{192a} + \frac{131x^4}{2048aa}$; &c.

Quod ſi $\dot{z}^3 - c\dot{z}\dot{z} - 2xx\dot{z} - cc\dot{z} + 2x^3 + c^3 = 0$ eſſet Æquatio ad Curvam, Reſolutio proferret tres varias Radices; videlicet aut $\dot{z} = c + x - \frac{xx}{4c} + \frac{x^3}{32cc}$; &c., aut $\dot{z} = c - x + \frac{3xx}{4c} - \frac{15x^3}{32cc}$; &c., aut denique $\dot{z} = -c - \frac{xx}{2c} - \frac{x^3}{2cc} + \frac{x^5}{4c^4}$; &c. Unde prodirent valores trium Arearum correſpondentium; nempe $z = cx + \frac{1}{2}xx - \frac{x^3}{12c} + \frac{x^4}{128cc}$; &c., aut $z = cx - \frac{1}{2}xx + \frac{x^3}{4c} - \frac{15x^4}{128cc}$; &c., aut denique $z = -cx - \frac{x^3}{6c} - \frac{x^4}{8cc} + \frac{x^6}{24c^4}$; &c.

Nihil hìc ſubjungo de Curvis Mechanicis, quia Methodus eas revocandi ad geometricarum formam poſtea tradetur.

Cùm autem valores z hìc inventi pertineant ad Areas, quæ jacent aliquando juxta finitam Abſciſſæ partem AB, aliquando juxta ejus partem BH infinitè productam verſus H, aliquando tandem juxta

juxta partes ambas pro variis earum Terminis; ut aſſignari poſſit legitimus Areæ valor adjacens alicui parti Abſciſſæ, hæc Area ſemper fieri debet æqualis differentiæ valorum z, pertinentium ad partes Abſciſſarum, quæ terminantur initio & fine Areæ.

TAB. VI. *Ex. gr.* Curva (*Fig.* 37.) expreſſa per Æquationem $\frac{1}{1+xx}=z$ habet Aream, (ut jam invenimus,) $z=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$, &c. Nunc, determinaturus Quantitatem Areæ bdDB adjacentis parti Abſciſſæ bB; ex valore ipſius z, qui oritur ponendo AB $=$ X, aufero valorem z, qui exſurgit dicendo Ab, $=x$, & reſtat $X-\frac{1}{3}X^3+\frac{1}{5}X^5$; &c. $-x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5$, &c., pro valore Areæ bdDB. Unde conſtat, quòd, ſi Ab. aut x ſupponeretur æqualis nihilo, valor totius Areæ AFDB foret $X-\frac{1}{3}X^3$ $+\frac{1}{5}X^5$, &c.

In eâdem Curvâ reperitur etiam $z=-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}$; &c. Hinc rurſus, juxta jam dicta, Area bdDB $=\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}$ $+\frac{1}{5x^5}$, &c., $-\frac{1}{X}+\frac{1}{3X^3}-\frac{1}{5X^5}$; &c. Quapropter, ſi AB, aut X poneretur infinita, adjacens Area bdH protenſa verſùs H, quæ etiam in infinitum extenditur, æquivaleret $\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}$; &c. Nam, ultima Series $-\frac{1}{X}+\frac{1}{3X^3}-\frac{1}{5X^5}$; &c., evaneſceret ob Denominatorem infinitum.

In Curvâ expoſitâ per Æquationem $a+\frac{a^3}{xx}=z$ invenimus, quòd $z=ax-\frac{a^3}{x}$. Quod oſtendit, quòd $aX-\frac{a^3}{X}-ax+\frac{a^3}{x}$ exponit Aream bdDB, quæ fit infinita, quando x ponitur æqualis nihilo, aut X infinita; & idcirco utraque Area AFDB, & bdH in infinitum protenditur; & aliquæ tantummodo partes intermediæ, ut

ut bd DB, exhiberi poſſunt. Hoc autem ſemper accidit, quando Abſciſſa x eſt ſimul in aliquorum ex Terminis valoris z Denominatore, & in aliorum Numeratore. Sed quando x eſt ſolùm in eorum Numeratore, ut in primo Exemplo, valor z pertinet ad Aream adjacentem ipſi AB, hinc ab hâc Ordinatâ. Et quando x eſt tantùm in Denominatore, ut in ſecundo Exemplo, hic valor, poſtquam omnia Terminorum ſigna mutaveris, ſpectat ad totam Aream infinitè productam inde ab Ordinatâ.

Si Curva (*Fig.* 38.) ſecat Abſciſſam alicubi inter Puncta b, & B, puta, in E, pro Areâ habebis differentiam (bdE — BDE) Arearum ſitarum ad diverſas Abſciſſæ partes; cui differentiæ adde Rectangulum BDGb & obtinebis Aream dEDG. TAB. VI.

Sed hoc præcipuè obſervandum eſt, cùm in valore $\dot{z}$ nonnulli Termini diviſi ſunt per x non aſcendentis ſupra primam Dimenſionem: Nam Areæ reſpondentes hiſce Terminis pertinent ad conicas Hyperbolas; & ideo ſeorſum exhiberi debent per Series infinitas, quomodo factum videbis in ſequentibus.

Sit $\frac{a^3 - aax}{ax + xx} = \dot{z}$ Æquatio ad Curvam: Hæc, per Diviſionem, ſuppeditat $\dot{z} = \frac{aa}{x} - 2a + 2x - \frac{2xx}{a} + \frac{2x^3}{aa}$; &c. Hinc $z = \boxed{\frac{aa}{x}} - 2ax + xx - \frac{2x^3}{3a} + \frac{x^4}{2aa}$; &c. Et Area bdDB $= \boxed{\frac{aa}{X}} - 2aX + XX - \frac{2X^3}{3a}$, &c., $- \boxed{\frac{aa}{x}} + 2ax - xx + \frac{2x^3}{3a} - \frac{x^4}{2aa}$; &c. Ubi ſigna $\boxed{\frac{aa}{x}}$; & $\boxed{\frac{aa}{X}}$ indicant exiguas Areas ſpectantes ad Terminos $\frac{aa}{x}$, & $\frac{aa}{X}$.

Nunc inveſtigaturus $\boxed{\frac{aa}{x}}$; & $\boxed{\frac{aa}{X}}$, pono Ab, aut x eſſe definitam & bB indefinitam, aut Fluentem, quam idcirco voco $= y$;

ita

Digitized by Google

ita ut ſit $\boxed{\frac{aa}{x+y}}$ Quantitas æqualis Areæ Hyperbolicæ, quæ adjacet ipſi bB, id eſt, $\boxed{\frac{aa}{X}} - \boxed{\frac{aa}{x}}$. Atqui, per Diviſionem, invenio $\frac{aa}{x+y} = \frac{aa}{x} - \frac{aay}{xx} + \frac{aayy}{x^3} - \frac{aay^3}{x^4}$; &c. & ideo $\boxed{\frac{aa}{x+y}}$, aut $\boxed{\frac{aa}{X}} - \boxed{\frac{aa}{x}} = \frac{aay}{x} - \frac{aayy}{2xx} + \frac{aay^3}{3x^3} - \frac{aay^4}{4x^4}$; &c.; ergo tota Area petita $bdDB = \frac{aay}{x} - \frac{aayy}{2xx} + \frac{aay^3}{3x^3}$; &c. $- 2aX + XX - \frac{2X^3}{3a}$; &c. $+ 2ax - xx + \frac{2x^3}{3a}$; &c.

Eodem pacto, ſi ſumpſiſſem AB, aut X pro Lineâ definitâ, habuiſſem $\boxed{\frac{aa}{X}} - \boxed{\frac{aa}{x}} = \frac{aay}{X} + \frac{aayy}{2XX} + \frac{aay^3}{3X^3} + \frac{aay^4}{4X^4}$; &c.

TAB. VI. Quinimo, ſi (*Fig.* 37.) Bb biſecaretur in C, & AC aſſumeretur definitæ Longitudinis, & Cb ac CB indefinitæ; fac AC $= e$; & bC, aut CB $= y$, erit $bd = \frac{aa}{e-y} = \frac{aa}{e} + \frac{aay}{ee} + \frac{aayy}{e^3} + \frac{aay^3}{e^4} + \frac{aay^4}{e^5}$; &c. quapropter Area Hyperbolica adjacens Abſciſſæ parti bC, erit $= \frac{aay}{e} + \frac{aayy}{2ee} + \frac{aay^3}{3e^3} + \frac{aay^4}{4e^4} + \frac{aay^5}{5e^5}$; &c. Sed etiam BD $= \frac{aa}{e+y} = \frac{aa}{e} - \frac{aay}{ee} + \frac{aayy}{e^3} - \frac{aay^3}{e^4} + \frac{aay^4}{e^5}$; &c, & idcirco Area adjacens alteri Abſciſſæ parti BC $= \frac{aay}{e} - \frac{aayy}{2ee} + \frac{aay^3}{3e^3} - \frac{aay^4}{4e^4} + \frac{aay^5}{5e^5}$; &c. Ergo ſumma harum Arearum $= \frac{2aay}{e} + \frac{2aay^3}{2e^3} + \frac{2aay^5}{5e^5}$; &c. æquivalebit ipſi $\boxed{\frac{aa}{X}} - \boxed{\frac{aa}{x}}$.

Sic

Sic Æquationis $\dot{z}^3 + \dot{z}z + \dot{z} - x^3 = 0$, denotantis naturam Curvæ, Radix eſt $\dot{z} = x - \frac{1}{3} - \frac{2}{9x} + \frac{7}{81xx} + \frac{5}{81x^3}$; &c. Unde conficitur $z = \frac{1}{2}xx - \frac{x}{3} - \boxed{\frac{2}{9x}} - \frac{7}{81x} - \frac{5}{162xx}$; &c. Et Area $bdDB = \frac{1}{2}XX - \frac{1}{3}X - \boxed{\frac{2}{9X}} - \frac{7}{81X} - \frac{5}{162XX}$; &c. $-\frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x + \boxed{\frac{2}{9x}} + \frac{7}{81x} + \frac{5}{162xx}$; &c, id eſt, $= \frac{1}{2}XX - \frac{1}{3}X - \frac{7}{81X}$; &c; $-\frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x + \frac{7}{81x}$; &c. $-\frac{4y}{9e} - \frac{4y^3}{27e^3} - \frac{4y^5}{45e^5}$; &c.

Sed hi Termini Hyperbolici plerumque, & ſummo quidem commodo, poſſunt evitari immutato Abſciſſæ initio, id eſt, ipſâmet Abſciſſâ auctâ, vel diminutâ Quantitate aliquâ datâ. Ut, in primo Exemplo, in quo $\frac{a^3 - aax}{ax + xx} = \dot{z}$ erat Æquatio ad Curvam, ſi ponerem initium Abſciſſæ ad Punctum b, & aſſumptâ Ab alicujus datæ Longitudinis, $\frac{1}{2}a$, ſcriberem x pro reliquâ Abſciſſâ Bb; videlicet, ſi minuerem Abſciſſam Quantitate $\frac{1}{2}a$, ſcribens $x + \frac{1}{2}a$ pro x, Æquatio evaderet $\frac{\frac{1}{2}a^3 - aax}{\frac{3}{4}aa + 2ax + xx} = \dot{z}$; & (per Diviſionem) $\dot{z} = \frac{2}{3}a - \frac{28}{9}x + \frac{200xx}{27a}$; &c., unde fit $z = \frac{2}{3}ax - \frac{14}{9}xx + \frac{200}{81a}x^3$; &c. = Areæ $bdDB$.

Et ſic, modò initium Abſciſſæ ponatur nunc ad hoc, nunc ad illud Punctum, Area Curvæ poteſt exprimi modis infinitis.

Etiam Æquatio $\frac{a^3 - aax}{ax + xx} = \dot{z}$ poterat reſolvi in duas infinitas

Series $z = \frac{a^3}{xx} - \frac{a^4}{x^3} + \frac{a^5}{x^4}$; &c; $-a + x - \frac{xx}{a} + \frac{x^3}{aa}$; &c. ubi nullus invenitur Terminus diviſus per primam Poteſtatem ipſius x. Sed genus hoc Serierum, in quarum unâ x in infinitum aſcendit in Numeratoribus, & in alterâ in Denominatoribus, aptæ non ſunt ad obtinendum ex iis valorem z, per Calculum arithmeticum, quando Species convertuntur in Numeros.

Si quis, poſtquam conſecutus fuerit Areæ valorem in Speciebus, aggrediatur Calculum numericum, is non facilè in difficultates incidet. Attamen, ut major lux ſuperioribus affundatur, addam unum, aut alterum Exemplum.

TAB. VI. Proponatur (*Fig.* 39.) Hyperbola AD, cujus Æquatio quidem eſt $\sqrt{x + xx} = z$, Vertex autem A, & uterque Axis æqualis Unitati. Juxta ea, quæ ſupra attulimus, Area ADB $= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}$; &c., id eſt, ea æquat $x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}xx - \frac{1}{28}x^3 + \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{704}x^5$; &c., quæ Series in infinitum produci poteſt, multiplicando ultimum Terminum, per ſucceſſivos Terminos hujus Progreſſionis $\frac{1\cdot3}{2\cdot5}x$; $-\frac{1\cdot5}{4\cdot7}x$; $-\frac{3\cdot7}{6\cdot9}x$; $-\frac{5\cdot9}{8\cdot11}x$; $-\frac{7\cdot11}{10\cdot13}x$; &c. Id eſt, primus Terminus $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \times \frac{1\cdot3}{2\cdot5}x$ dat ſecundum Terminum $\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}$; Hic autem multiplicatus per $-\frac{1\cdot5}{4\cdot7}x$ conficit tertium $-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}$; Qui rurſus multiplicatus per $-\frac{3\cdot7}{6\cdot9}x$ facit $\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$ quartum; & ſic in infinitum.

Jam, tribuatur ipſi AB data quævis Longitudo, puta, $\frac{1}{4}$ & pro x ſcribatur hic Numerus, ejúſque Radix $\frac{1}{2}$ pro $x^{\frac{1}{2}}$: tunc primus Terminus $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, aut $\frac{2}{3}\times\frac{1}{8}$ reductus ad Fractiones decimales evadit.

evadit 0,083333333; &c. Hic in $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}$ ductus conficit 0,00625 ſecundum Terminum; Qui ductus in $\frac{-1 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 7}$ præbet $-$ 0,0002790178; &c., tertium Terminum. Atque ita porrò. At in duas Tabulas diſtribuo Terminos, quos ita gradatim invenio; ponens Affirmativos in earum unâ, negativos autem in alterâ, & illos addo, ut hìc factum vides.

+ 0,0833333333333333	— 0, 0002790178571429
6250000000000	3467906605 1
271267361111	834465027
5135169396	26285354
144628917	961296
4954581	38676
190948	1663
7963	75
352	4
16	— 0, 0002825719389575
1	+ 0, 0896109885646518
+ 0, 0896109885646518	0, 0893284166257043

Deinde ex Affirmativorum ſummâ detraho ſummam negativorum, ſupereſt 0,0893284166257043, quæ eſt Quantitas Areæ hyperbolicæ ADB. Quod erat inveniendum.

Nunc, proponatur (*Fig.* 39.) Circulus A*d*F qui exprimitur Æquatione $\sqrt{x - xx} = z$, cujus nempe Diameter Unitas eſt, ac (juxta jam dicta) ejus Area A*d*B erit $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28} x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72} x^{\frac{9}{2}}$; &c. Cùm autem in hâc Serie, Termini nullo pacto differant à Terminis Seriei, quâ ſuperiùs expoſita fuit Area hyperbolica, niſi ſignis + & —; tantùm connectendi, ſuperſunt iidem Termini cum diverſis ſignis; Subtrahendum eſt, ſcilicet, Aggregatum ex ambabus ſuperiorum Tabularum Summis 0,0898935605036193, TAB. VI.

 ex

ex duplo primi Termini 0,16666666666666666; &c., & quod reſtat, nempe, 0,0767731061630473 erit pars AdB Areæ circularis, ſuppoſitâ Rectâ AB quadrante Diametri. Hìc obſervare potes, quòd, licèt Area circularis cum hyperbolicâ conferri nequeat, geometricè rem conſiderando, tamen ambas deteximus eodem Calculo arithmetico.

Circuli parte AdD ſic inventâ, hìnc erui poteſt tota Area. Etenim age Radium dC, & multiplica Bd, aut $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ in BC vel $\frac{1}{4}$, & Producti ſemiſſis, id eſt, $\frac{1}{32}\sqrt{3}$, aut 0,0541265877365275 erit valor Trianguli CdB; hoc adde Areæ AdB, & aſſequeris Sectorem ACd = 0,1308996938995747, qui ſextuplicatus, id eſt, 0,7853981633974482 dabit totam Aream.

Hinc, obiter, detegetur Longitudo Peripheriæ, (quæ erit 3,1415926535897928,) dividendo ſcilicet Aream per Diametri quadrantem.

His addere libet Calculum Areæ comprehenſæ inter Hyperbolam
TAB. VI. dFD (*Fig.* 40.) & ejus Aſymptotum CA. Sit C Hyperbŏlæ Centrum, & faciendo CA $= a$, AF $= b$, & AB $=$ Ab $= x$: erit $\frac{ab}{a+x} =$ BD & $\frac{ab}{a-x} = bd$; igitur Area AFDB $= bx - \frac{bxx}{2a} + \frac{bx^3}{3aa} - \frac{bx^4}{4a^3}$; &c., & Area AF$db$ $= bx + \frac{bxx}{2a} + \frac{bx^3}{3aa} + \frac{bx^4}{4a^3}$; &c., earúmque Summa dbBD $= 2bx + \frac{2bx^3}{3aa} + \frac{2bx^5}{5a^4} + \frac{2bx^7}{7a^6}$; &c. Jam ſuppone AC $=$ AF $= 1$ & AB aut Ab $= \frac{1}{10}$; exiſtentibus Cb $= 0,9$, & CB $= 1,1$, ac ſubſtituendo hos Numeros pro a, b, & x, primus Seriei Terminus evadit 0,2, ſecundus 0,00066666666 &c., tertius 0,000004, & ſic deinceps, ut vides in appoſitâ Tabellâ.

	0, 2000000000000000
	6666666666666
	40000000000
	285714286
	2222222
	18182
	154
	1
Summa	0, 2006706954621511 = Areæ *bd*DB.

Si ſeorſum habere velles Areæ partes A*d* & AD, ſubduc minorem AB ex majore A*d*, & ſupereſſe perſpicies $\frac{bxx}{a} + \frac{bx^4}{2a^3} + \frac{bx^6}{3a^5} + \frac{bx^8}{4a^7}$; &c., ubi ſcriptis 1 pro *a* & *b*, ac $\frac{1}{10}$ pro *x* & Terminis ad Fractiones decimales revocatis, habebis.

	0, 0100000000000000
	500000000000
	3333333333
	25000000
	200000
	1667
	14
Summa	0, 0100503358535014 = A*d* — AD.

Jam, ſi hæc Arearum Differentia addatur earum Summæ jam repertæ, aut ab eâ ſubtrahatur, dimidium Aggregatum 0,1053605156578263 erit Area major A*d*, & demidium reliquum 0,0953101798043248 erit minor Area AD.

Quin, tametſi ſupponas AB & A*b* $= \frac{1}{100}$, vel CB $= 1,01$ & C*b* $= 0,99$, excudere potes ex iiſdem Tabulis Areas iſtas AD & A*d* dummodò Numeros legitimè transferas in inferiora loca, ut hìc factum vides.

0,

0,0200000000000000	0,0001000000000000
66666666666	50000000
4000000	3333
28	Summa 0,0001000050003333 = Ad − AD
Summa 0,0200006667066694 = bD	
Dimidium Aggregatum	Dimidium Reſiduum
0,0100503358535014 = Ad	0,0099503308531681 = AD

Eodem pacto, ſi ponas AB & $Ab = \frac{1}{1000}$, aut CB = 1,001, & Cb = 0,999; habebis Aream Ad = 0,0010005003335835, & AD = 0,0009995003330835.

Ita pariter, (ſi AC & AF = 1,), faciendo AB & Ab = 0,2, aut 0,02, aut 0,002 exſurgent Areæ.

Ad = 0,2231435513142097.
vel Ad = 0,0202027073175194.
vel Ad = 0,002002.
& AD = 0,1823215567939546.
& AD = 0,0198026272961797.
& AD = 0,001.

Ex his Areis ita repertis facilè deduci poſſunt aliæ per ſolas Additiones & Subſtractiones. Ut enim $\frac{1,2}{0,8}$ in $\frac{1,2}{0,9} = 2$, Summa 0,6931471805599453 Arearum pertinentium ad Rationes $\frac{1,2}{0,8}$ & $\frac{1,2}{0,9}$, (id eſt, inſiſtentium ſuper Abſciſſæ partes 1,2 — 0,8, & 1,2 — 0,9,) erit Area AF$\delta\beta$, poſitâ Cβ = 2, ut notum eſt.

Rurſus quia $\frac{1,2}{0,8}$ in 2 = 3, Summa 1,0986122886681097 Arearum pertinentium ad $\frac{1,2}{0,8}$ & 2 erit AF$\delta\beta$ ſi Cβ eſt 3.

Item quia $\frac{2\times 2}{0,5} = 5$, & $2 \times 5 = 10$, per legitimam Arearum Addi-

Additionem reperies $1,6093379124341004 = AF\delta\beta$; quando $CB = 5$; & $2,302585092994 0457 = AF\delta\beta$, cùm $CB = 10$.

Sic pariter, quia $10 \times 10 = 100$, & $10 \times 100 = 1000$, ac $\sqrt{5} \times 10 \times 0,98 = 7$, ac $10 \times 1,1 = 11$, ac $\frac{1000 \times 1,001}{7 \times 11} = 13$, ac $\frac{100 \times 0,998}{2} = 499$, palam eſt quòd Area $AF\delta\beta$ reperiri poteſt per compoſitionem Arearum ſupra inventarum, quando $C\beta = 100; 1000; 7$, aut cuivis alteri ſupra dictorum Numerorum, ſtante ſemper $AB = BF = 1$.

Hæc ad id ſpectant, ut palam fiat, quòd hinc deduci poteſt Methodus valde concinna, quà conſtrui poteſt Canon Logarithmorum, qui determinant Areas hyperbolicas, (è quibus Areis erui facilè poſſunt Logarithmi) & qui reſpondent Numeris primitivis quotquot ſunt, & id ſolùm per duas Operationes non nimis perplexas.

Sed, cùm hic Canon ex hoc fonte meliùs quàm ex alio quolibet derivari videatur, quid fiet, ſi eorum Conſtructionem hìc indico, quò magis perfectum ſit opus?

Primùm igitur, aſſumptis 0 pro Logarithmo Numeri 1, & 1 pro Logarithmo Numeri 10, ut vulgò fit, Logarithmi Numerorum primitivorum 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 37, inveſtigandi ſunt, dividendo Areas Hyperbolicas nuper inventas per 2,302585092994 0457, quæ eſt Area reſpondens Numero 10: vel, (quod idem eſt,) multiplicando eas per hujus reciprocam 0,4342944819032518.

Sic, *ex. gr.*, ſi 0,69314718, &c., eſt Area reſpondens Numero 2, ea multiplicata per 0,43429 &c., facit 0,30102999566398 12 Logarithmum Numeri 2.

Deinde Logarithmi aliorum Numerorum, qui ſunt in Canone, & qui componuntur horum Multiplicatione, inveniendi ſunt per Additionem Logarithmorum ad eos pertinentium, ut fieri ſolet. Ac loca inania poſtea ſunt interpolanda ope ſequentis Theorematis.

THEOR. I.

Sit n Numerus, cui Logarithmus aptari debet, & x differentia inter hunc & duos proximos Numeros æqualiter utrinque diſſitos,

& quorum Logarithmi jam inventi ſint, & ſit d dimidiata Logarithmorum differentia. Tunc optatus Numeri n Logarithmus obtinebitur addendo Quantitatem $d + \frac{dx}{2n} + \frac{dx^3}{12n^3}$ &c. Logarithmo minoris Numeri.

Nam, ſi Numeri exponantur per Cp, Cβ & CP; & ſit Rectangulum CBD aut C$\beta\delta = 1$, ut anteà; & agantur Ordinatæ pq & PQ; ſcribatur n pro Cβ, & x pro βp aut βP, Area pq QP aut $\frac{2x}{n} + \frac{2x^3}{3n^3} + \frac{2x^5}{5n^5}$; &c., erit ad Aream $pq\delta\beta$ aut $\frac{x}{n} + \frac{xx}{2nn} + \frac{x^3}{3n^3}$; &c. ut differentia quæ eſt inter extremorum Numerorum Logarithmos, vel $2d$, ad differentiam quæ eſt inter Logarithmos minoris & medii, quæ idcirco erit $\dfrac{\frac{dx}{n} + \frac{dxx}{2nn} + \frac{dx^3}{3n^3};\ \&c.}{\frac{x}{n} + \frac{x^3}{3n^3} + \frac{x^5}{5n^5};\ \&c.}$, id eſt (factâ Diviſione) $d + \frac{dx}{2n} + \frac{dx^3}{12n^3}$; &c.

Hujus Seriei duo primi Termini $d + \frac{dx}{n}$ erunt, puto, ſatis accurati ad conſtruendum Canonem Logarithmorum, quanquam Logarithmi ad quatuordecim vel quindecim Figuras uſque producendi forent; dummodò tamen Numeri, quorum Logarithmi ſunt inveniendi, non ſint infra 1000. Quod vix moleſtiam faceſſere poſſet ei qui computat, quia x paſſim unitas eſt aut binarium. Sed tamen non neceſſariò loca omnia interpolanda ſunt per hanc Regulam. Nam, Logarithmi Numerorum, qui conflantur per Multiplicationem aut Diviſionem Numerorum jam inventorum, excudi poſſunt ex Numeris, quorum Logarithmi reperti jam ſunt, addendo ſcilicet, aut ſubducendo Logarithmos iſtos. Quinimo etiam per Logarithmorum differentias primas, ſecundas, tertias, &c., ſi res poſtulat, impleri poſſunt loca inania, & quidem expeditè. Superior autem Regula ſolùm adhibenda eſt, quando plura loca plena deinceps deſunt, ut ſic inveniantur eorum differentiæ.

Eâdem Methodo poſſunt inveniri Regulæ, pro Logarithmorum

intercа-

intercalatione, quando ex tribus Numeris dantur Logarithmi, pertinentes ad medium & minimum, aut ad medium & maximum, quamquam Numeri non conſtituant arithmeticam Progreſſionem.

Quinetiam, facilè, hujus Methodi veſtigia premendo detegi poſſunt Regulæ utiles ad conſtruendas Tabulas Sinuum & Tangentium artificialium ſine naturalium auxilio: Sed hæc obiter.

Hactenus locuti ſumus de Quadraturâ Curvarum, quæ exprimuntur Æquationibus conſtantibus ex Terminis complicatis, & id per harum Æquationum Reductionem, ad alias quæ conflantur infinito ſimplicium Terminorum numero. Cùm autem hæ Curvæ poſſint aliquando quadrari etiam per Æquationes finitas, aut quomodocumque comparari cum aliis Curvis, quarum Areæ quodam modo haberi poſſunt pro datis; cujus generis ſunt Sectiones conicæ. Ideo non extra rem putavi hìc afferre duos ſequentes Catalogos, aut Tabulas Theorematum, quas pollicitus eram, quáſque conſtruxi ope ſuperiorum Propoſitionum VII. & VIII.

Harum Tabularum prima exhibet Areas Curvarum quæ quadrari poſſunt. Secunda verò continet Curvas, quarum Areæ conferri poſſunt cum Sectionum conicarum Areis. In utràque litteræ d; e; f; g; h, denotant datas Quantitates quaſcumque, x & z Curvarum Abſciſſas, u & y Ordinatas parallelas, s & t Areas, ut priùs. Sed litteræ η & θ adnexæ z, indicant Numerum Dimenſionum ipſius z, ſive is ſit integer, ſive fractus, ſive affirmativus ſive negativus: Ut ſi $\eta = 3$, tunc $z^{\eta} = z^3$; $z^{2\eta} = z^6$, $z^{-\eta} = z^{-3}$ aut $\frac{1}{z^3}$; $z^{\eta+1} = z^4$; & $z^{\eta-1} = zz$.

Præterea in Arearum valoribus ſcripſi, brevitatis cauſâ, R pro Radicalibus $\sqrt{e + fz^{\eta}}$ aut $\sqrt{e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}}$, & p pro $\sqrt{h + iz^{\eta}}$, quibus afficitur valor Ordinatæ y.

Tabula I. continens aliquas Areas Curvilineas relatas ad rectilin. Figuras, conſtructa per Probl. VII.

		Ordo Curvarum	Arearum Valor
I		$dz^{\eta-1} = y$	$\frac{d}{\eta} z^{\eta} = t$
II		$\frac{dz^{\eta-1}}{ee + 2efz^{\eta} + ffz^{2\eta}} = y$	$\frac{dz^{\eta}}{\eta ee + \eta efz^{\eta}} = t$, aut $\frac{-d}{\eta ef + \eta ffz^{\eta}} = t.$
III	1	$dz^{\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{2d}{3\eta f} R^{3} = t$
	2	$dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{-4e + 6fz^{\eta}}{15\eta ff} dR^{3} = t$
	3	$dz^{3\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{16ee - 24efz^{\eta} + 30ffz^{2\eta}}{105\eta f^{3}} dR^{3} = t$
	4	$dz^{4\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{-96e^{3} + 144eefz^{\eta} - 180effz^{2\eta} + 210f^{3}z^{3\eta}}{945\eta f^{4}} dR^{3} = t$
IV	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{2d}{\eta f} R = t$
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{-4e + 2fz^{\eta}}{3\eta ff} dR = t$
	3	$\frac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{16ee - 8efz^{\eta} + 6ffz^{2\eta}}{15\eta f^{3}} dR = t$
	4	$\frac{dz^{4\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{-96e^{3} + 48eefz^{\eta} - 36effz^{2\eta} + 30f^{3}z^{3\eta}}{105\eta f^{4}} dR = t$

Ordo		Curvarum	Arearum Valor
V	1	$\overline{-\eta-1}$ * * in $\frac{1}{2}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$z^{\theta}R^{3}=t$
	2	$\overline{+\eta-1}$ $+2\theta gz^{\theta+2\eta-1}$ $+6\eta g$ in $\frac{1}{2}\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$	$z^{\theta}R^{3}=t$
VI	1	$\frac{\overline{-\eta}\times fz^{\theta+\eta-1}}{z^{\eta}}=y$	$z^{\theta}R=t$
	2	$\frac{\overline{\eta}\times fz^{\theta+\eta-1}+\overline{2\theta+2\eta}\times gz^{\theta+2\eta-1}}{2\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=y$	$z^{\theta}R=t$
VII	1	$\frac{\overline{-\eta}\times fz^{\theta+\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{z^{\theta}}{R}=t$
	2	$\frac{\overline{-\eta}\times fz^{\theta+\eta-1}+\overline{2\theta-2\eta}\times gz^{\theta+2\eta-1}}{gz^{2\eta}\times 2\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=y$	$\frac{z^{\theta}}{R}=t$
VIII	1	$\frac{\overline{-2\eta}\times fz^{\theta+\eta-1}}{z^{\eta}+ffz^{2\eta}}=2y$	$\frac{z^{\theta}}{RR}$ aut $\left(\frac{z^{\theta}}{e+fz^{\eta}}\right)=t$
	2	$\frac{\overline{-2\eta}\times fz^{\theta+\eta-1}+\overline{2\theta-4\eta}\times gz^{\theta+2\eta-1}}{+\overline{ff+2eg}\times z^{2\eta}+2fgz^{3\eta}+ggz^{4\eta}}=2y$	$\frac{z^{\theta}}{RR}$ aut $\frac{z^{\theta}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=t$
IX		$\overline{+3\eta}\times fhz^{\theta+\eta-1}+\overline{2\theta+4\eta}\times fiz^{\theta+2\eta-1}$ $\overline{+\eta}\times ei$ in $\frac{\sqrt{e+fz^{\eta}}}{2\sqrt{b+iz^{\eta}}}=y$	$z^{\theta}R^{3}p=t$
X		$\overline{+3\eta}\times fhz^{\theta+\eta-1}+\overline{2\theta+2\eta}\times fiz^{\theta+2\eta-1}$ $\overline{-\eta}\times ei$ in $\frac{\sqrt{e+fz^{\eta}}}{b+iz^{\eta}\times\sqrt{b+iz^{\eta}}}=y$	$\frac{z^{\theta}R^{3}}{p}=t$

Series $z = \frac{a^3}{xx} - \frac{a^4}{x^3} + \frac{a^5}{x^4}$; &c; $-a+x-\frac{xx}{a}+\frac{x^3}{aa}$; &c. ubi nullus invenitur Terminus diviſus per primam Poteſtatem ipſius x. Sed genus hoc Serierum, in quarum unâ x in infinitum aſcendit in Numeratoribus, & in alterâ in Denominatoribus, aptæ non ſunt ad obtinendum ex iis valorem z, per Calculum arithmeticum, quando Species convertuntur in Numeros.

Si quis, poſtquam conſecutus fuerit Areæ valorem in Speciebus, aggrediatur Calculum numericum, is non facilè in difficultates incidet. Attamen, ut major lux ſuperioribus affundatur, addam unum, aut alterum Exemplum.

TAB. VI. Proponatur (*Fig.* 39.) Hyperbola AD, cujus Æquatio quidem eſt $\sqrt{x+xx} = z$, Vertex autem A, & uterque Axis æqualis Unitati. Juxta ea, quæ ſupra attulimus, Area ADB $= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}$; &c., id eſt, ea æquat $x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}xx - \frac{1}{28}x^3 + \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{704}x^5$; &c., quæ Series in infinitum produci poteſt, multiplicando ultimum Terminum, per ſucceſſivos Terminos hujus Progreſſionis $\frac{1\cdot3}{2\cdot5}x$; $-\frac{1\cdot5}{4\cdot7}x$; $-\frac{3\cdot7}{6\cdot9}x$; $-\frac{5\cdot9}{8\cdot11}x$; $-\frac{7\cdot11}{10\cdot13}x$; &c. Id eſt, primus Terminus $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \times \frac{1\cdot3}{2\cdot5}x$ dat ſecundum Terminum $\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}$; Hic autem multiplicatus per $-\frac{1\cdot5}{4\cdot7}x$ conficit tertium $-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}$; Qui rurſus multiplicatus per $-\frac{3\cdot7}{6\cdot9}x$ facit $\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$ quartum; & ſic in infinitum. Jam, tribuatur ipſi AB data quævis Longitudo, puta, $\frac{1}{4}$ & pro x ſcribatur hic Numerus, ejúſque Radix $\frac{1}{2}$ pro $x^{\frac{1}{2}}$: tunc primus Terminus $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, aut $\frac{2}{3}\times\frac{1}{8}$ reductus ad Fractiones decimales

evadit

evadit 0,083333333; &c. Hiç in $\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}$ ductus conficit 0,00625 ſecundum Terminum; Qui ductus in $\frac{-1\cdot 5}{4\cdot 4\cdot 7}$ præbet $-$ 0,0002790178; &c., tertium Terminum. Atque ita porrò. At in duas Tabulas diſtribuo Terminos, quos ita gradatim invenio; ponens Affirmativos in earum unâ, negativos autem in alterâ, & illos addo, ut hìc factum vides.

+0,0833333333333333	—0,0002790178571429
6250000000000	34679066051
271267361111	834465027
5135169396	26285354
144628917	961296
4954581	38676
190948	1663
7963	75
352	4
16	—0,0002825719389575
1	+0,0896109885646518
+0,0896109885646518	0,0893284166257043

Deinde ex Affirmativorum ſummâ detraho ſummam negativorum, ſupereſt 0,0893284166257043, quæ eſt Quantitas Areæ hyperbolicæ ADB. Quod erat inveniendum.

Nunc, proponatur (*Fig.* 39.) Circulus A*d*F qui exprimitur Æquatione $\sqrt{x - xx} = z$, cujus nempe Diameter Unitas eſt, ac (juxta jam dicta) ejus Area A*d*B erit $\frac{2}{2} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28} x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72} x^{\frac{9}{2}}$; &c. Cùm autem in hâc Serie, Termini nullo pacto differant à Terminis Seriei, quâ ſuperiùs expoſita fuit Area hyperbolica, niſi ſignis + & —; tantùm connectendi, ſuperſunt iidem Termini cum diverſis ſignis; Subtrahendum eſt, ſcilicet, Aggregatum ex ambabus ſuperiorum Tabularum Summis 0,0898935605036193, TAB. VI.

ex duplo primi Termini 0, 16666666666666666; &c., & quod reſtat, nempe, 0, 0767731061630473 erit pars A*d*B Areæ circularis, ſuppoſitâ Rectâ AB quadrante Diametri. Hìc obſervare potes, quòd, licèt Area circularis cum hyperbolicâ conferri nequeat, geometricè rem conſiderando, tamen ambas deteximus eodem Calculo arithmetico.

Circuli parte A*d*D ſic inventâ, hìnc erui poteſt tota Area. Etenim age Radium *d*C, & multiplica B*d*, aut $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ in BC vel $\frac{1}{4}$, & Producti ſemiſſis, id eſt, $\frac{1}{32}\sqrt{3}$, aut 0, 0541265877365275 erit valor Trianguli C*d*B; hoc adde Areæ A*d*B, & aſſequeris Sectorem A C*d* = 0, 1308996938995747, qui ſextuplicatus, id eſt, 0, 7853981633974482 dabit totam Aream.

Hinc, obiter, detegetur Longitudo Peripheriæ, (quæ erit 3, 14159265358979 28,) dividendo ſcilicet Aream per Diametri quadrantem.

His addere libet Calculum Areæ comprehenſæ inter Hyperbolam
TAB. VI. *d*FD (*Fig.*40.) & ejus Aſymptotum CA. Sit C Hyperbolæ Centrum, & faciendo CA $= a$, AF $= b$, & AB $=$ Ab $= x$: erit $\frac{ab}{a+x} =$ BD & $\frac{ab}{a-x} = bd$; igitur Area AFDB $= bx - \frac{bxx}{2a} + \frac{bx^3}{3aa} - \frac{bx^4}{4a^3}$; &c., & Area AF$db$ $= bx + \frac{bxx}{2a} + \frac{bx^3}{3aa} + \frac{bx^4}{4a^3}$; &c., earúmque Summa dbBD $= 2bx + \frac{2bx^3}{3aa} + \frac{2bx^5}{5a^4} + \frac{2bx^7}{7a^6}$; &c. Jam ſuppone AC $=$ AF $= 1$ & AB aut Ab $= \frac{1}{10}$; exiſtentibus Cb $= 0{,}9$, & CB $= 1{,}1$, ac ſubſtituendo hos Numeros pro a, b, & x, primus Seriei Terminus evadit 0, 2, ſecundus 0, 00066666666 &c., tertius 0, 000004, & ſic deinceps, ut vides in appoſitâ Tabellâ.

	0,2000000000000000
	6666666666666
	40000000000
	285714286
	2222222
	18182
	154
	1
Summa	0,2006706954621511 = Areæ *bd*DB.

Si ſeorſum habere velles Areæ partes A*d* & AD, ſubduc minorem AB ex majore A*d*, & ſupereſſe perſpicies $\frac{bxx}{a} + \frac{bx^4}{2a^3} + \frac{bx^6}{3a^5} + \frac{bx^8}{4a^7}$; &c., ubi ſcriptis 1 pro *a* & *b*, ac $\frac{1}{10}$ pro *x* & Terminis ad Fractiones decimales revocatis, habebis.

	0,0100000000000000
	500000000000
	3333333333
	25000000
	200000
	1667
	14
Summa	0,0100503358535014 = A*d* — AD.

Jam, ſi hæc Arearum Differentia addatur earum Summæ jam repertæ, aut ab eâ ſubtrahatur, dimidium Aggregatum 0,105360 5156578263 erit Area major A*d*, & demidium reliquum 0,095 3101798043248 erit minor Area AD.

Quin, tametſi ſupponas AB & A*b* = $\frac{1}{100}$, vel CB = 1,01 & C*b* = 0,99, excudere potes ex iiſdem Tabulis Areas iſtas AD & A*d* dummodò Numeros legitimè transferas in inferiora loca, ut hìc factum vides.

0,

0,02000000000000000	0,00010000000000000
666666666666	50000000
4000000	3333
28	Summa 0,0001000050003333 = $Ad - AD$
Summa 0,02000066670666694 = bD	
Dimidium Aggregatum	Dimidium Reſiduum
0,01005033585035014 = Ad	0,00995033085031681 = AD

Eodem pacto, ſi ponas AB & $Ab = \frac{1}{1000}$, aut CB = 1,001, & Cb = 0,999; habebis Aream Ad = 0,00100050003335835, & AD = 0,00099950003330835.

Ita pariter, (ſi AC & AF = 1,), faciendo AB & Ab = 0,2, aut 0,02, aut 0,002 exſurgent Areæ.

Ad = 0, 2231435513142097.
vel Ad = 0, 0202027073175194.
vel Ad = 0, 002002.
& AD = 0, 1823215567939546.
& AD = 0, 0198026272961797.
& AD = 0, 001.

Ex his Areis ita repertis facilè deduci poſſunt aliæ per ſolas Additiones & Subſtractiones. Ut enim $\frac{1,2}{0,8}$ in $\frac{1,2}{0,9} = 2$, Summa 0, 6931471805599453 Arearum pertinentium ad Rationes $\frac{1,2}{0,8}$ & $\frac{1,2}{0,9}$, (id eſt, inſiſtentium ſuper Abſciſſæ partes 1,2 — 0,8, & 1,2 — 0,9,) erit Area $AF\delta\beta$, poſitâ $C\beta = 2$, ut notum eſt.

Rurſus quia $\frac{1,2}{0,8}$ in $2 = 3$, Summa 1,0986122886681097 Arearum pertinentium ad $\frac{1,2}{0,8}$ & 2 erit $AF\delta\beta$ ſi $C\beta$ eſt 3.

Item quia $\frac{2 \times 2}{0,5} = 5$, & $2 \times 5 = 10$, per legitimam Arearum Addi-

Additionem reperies 1,6093379124341004 = AFδβ; quando CB = 5; & 2,302585092994057 = AFδβ, cùm CB = 10.

Sic pariter, quia $10 \times 10 = 100$, & $10 \times 100 = 1000$, ac $\sqrt{5} \times 10 \times 0,98 = 7$, ac $10 \times 1,1 = 11$, ac $\frac{1000 \times 1,001}{7 \times 11} = 13$, ac $\frac{100 \times 0,998}{2} = 499$, palam eſt quòd Area AFδβ reperiri poteſt per compoſitionem Arearum ſupra inventarum, quando Cβ = 100; 1000; 7, aut cuivis alteri ſupra dictorum Numerorum, ſtante ſemper AB = BF = 1.

Hæc ad id ſpectant, ut palam fiat, quòd hinc deduci poteſt Methodus valde concinna, quà conſtrui poteſt Canon Logarithmorum, qui determinant Areas hyperbolicas, (è quibus Areis erui facilè poſſunt Logarithmi) & qui reſpondent Numeris primitivis quotquot ſunt, & id ſolùm per duas Operationes non nimis perplexas.

Sed, cùm hic Canon ex hoc fonte meliùs quàm ex alio quolibet derivari videatur, quid fiet, ſi eorum Conſtructionem hìc indico, quò magis perfectum ſit opus?

Primùm igitur, aſſumptis 0 pro Logarithmo Numeri 1, & 1 pro Logarithmo Numeri 10, ut vulgò fit, Logarithmi Numerorum primitivorum 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 37, inveſtigandi ſunt, dividendo Areas Hyperbolicas nuper inventas per 2,302585092994057, quæ eſt Area reſpondens Numero 10: vel, (quod idem eſt,) multiplicando eas per hujus reciprocam 0,4342944819032518.

Sic, *ex. gr.*, ſi 0,69314718, &c., eſt Area reſpondens Numero 2, ea multiplicata per 0,43429 &c., facit 0,3010299956639812 Logarithmum Numeri 2.

Deinde Logarithmi aliorum Numerorum, qui ſunt in Canone, & qui componuntur horum Multiplicatione, inveniendi ſunt per Additionem Logarithmorum ad eos pertinentium, ut fieri ſolet. Ac loca inania poſtea ſunt interpolanda ope ſequentis Theorematis.

THEOR. I.

Sit *n* Numerus, cui Logarithmus aptari debet, & *x* differentia inter hunc & duos proximos Numeros æqualiter utrinque diſſitos,

& quorum Logarithmi jam inventi ſint, & ſit d dimidiata Logarithmorum differentia. Tunc optatus Numeri n Logarithmus obtinebitur addendo Quantitatem $d + \frac{dx}{2n} + \frac{dx^3}{12n^3}$ &c. Logarithmo minoris Numeri.

Nam, ſi Numeri exponantur per Cp, $C\beta$ & CP; & ſit Rectangulum CBD aut $C\beta\delta = 1$, ut anteà; & agantur Ordinatæ pq & PQ; ſcribatur n pro $C\beta$, & x pro βp aut βP, Area $pqQP$ aut $\frac{2x}{n} + \frac{2x^3}{3n^3} + \frac{2x^5}{5n^5}$; &c., erit ad Aream $pq\delta\beta$ aut $\frac{x}{n} + \frac{xx}{2nn} + \frac{x^3}{3n^3}$; &c. ut differentia quæ eſt inter extremorum Numerorum Logarithmos, vel $2d$, ad differentiam quæ eſt inter Logarithmos minoris & medii, quæ idcirco erit $\dfrac{\frac{dx}{n} + \frac{dxx}{2nn} + \frac{dx^3}{3n^3};\ \&c.}{\frac{x}{n} + \frac{x^3}{3n^3} + \frac{x^5}{5n^5};\ \&c.}$, id eſt (factâ Diviſione) $d + \frac{dx}{2n} + \frac{dx^3}{12n^3}$; &c.

Hujus Seriei duo primi Termini $d + \frac{dx}{n}$ erunt, puto, ſatis accurati ad conſtruendum Canonem Logarithmorum, quanquam Logarithmi ad quatuordecim vel quindecim Figuras uſque producendi forent; dummodò tamen Numeri, quorum Logarithmi ſunt inveniendi, non ſint infra 1000. Quod vix moleſtiam faceſſere poſſet ei qui computat, quia x paſſim unitas eſt aut binarium. Sed tamen non neceſſariò loca omnia interpolanda ſunt per hanc Regulam. Nam, Logarithmi Numerorum, qui conflantur per Multiplicationem aut Diviſionem Numerorum jam inventorum, excudi poſſunt ex Numeris, quorum Logarithmi reperti jam ſunt, addendo ſcilicet, aut ſubducendo Logarithmos iſtos. Quinimo etiam per Logarithmorum differentias primas, ſecundas, tertias, &c., ſi res poſtulat, impleri poſſunt loca inania, & quidem expeditè. Superior autem Regula ſolùm adhibenda eſt, quando plura loca plena deinceps deſunt, ut ſic inveniantur eorum differentiæ.

Eâdem Methodo poſſunt inveniri Regulæ, pro Logarithmorum intercа-

intercalatione, quando ex tribus Numeris dantur Logarithmi, pertinentes ad medium & minimum, aut ad medium & maximum, quamquam Numeri non conſtituant arithmeticam Progreſſionem.

Quinetiam, facilè, hujus Methodi veſtigia premendo detegi poſſunt Regulæ utiles ad conſtruendas Tabulas Sinuum & Tangentium artificialium ſine naturalium auxilio: Sed hæc obiter.

Hactenus locuti ſumus de Quadraturâ Curvarum, quæ exprimuntur Æquationibus conſtantibus ex Terminis complicatis, & id per harum Æquationum Reductionem, ad alias quæ conflantur infinito ſimplicium Terminorum numero. Cùm autem hæ Curvæ poſſint aliquando quadrari etiam per Æquationes finitas, aut quomodocumque comparari cum aliis Curvis, quarum Areæ quodam modo haberi poſſunt pro datis; cujus generis ſunt Sectiones conicæ. Ideo non extra rem putavi hìc afferre duos ſequentes Catalogos, aut Tabulas Theorematum, quas pollicitus eram, quáſque conſtruxi ope ſuperiorum Propoſitionum VII. & VIII.

Harum Tabularum prima exhibet Areas Curvarum quæ quadrari poſſunt. Secunda verò continet Curvas, quarum Areæ conferri poſſunt cum Sectionum conicarum Areis. In utrâque litteræ d; e; f; g; h, denotant datas Quantitates quaſcumque, x & z Curvarum Abſciſſas, u & y Ordinatas parallelas, s & t Areas, ut priùs. Sed litteræ η & θ adnexæ z, indicant Numerum Dimenſionum ipſius z, ſive is ſit integer, ſive fractus, ſive affirmativus ſive negativus: Ut ſi $\eta = 3$, tunc $z^{\eta} = z^{3}$; $z^{2\eta} = z^{6}$, $z^{-\eta} = z^{-3}$ aut $\frac{1}{z^{3}}$; $z^{\eta+1} = z^{4}$; & $z^{\eta-1} = zz$.

Præterea in Arearum valoribus ſcripſi, brevitatis cauſâ, R pro Radicalibus $\sqrt{e+fz^{\eta}}$ aut $\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}$, & p pro $\sqrt{h+iz^{\eta}}$, quibus afficitur valor Ordinatæ y.

Digitized by Google

Tabula I. continens aliquas Areas Curvilineas relatas ad rectilin. Figuras, constructa per Probl. VII.

		Ordo Curvarum	Arearum Valor
I		$dz^{\eta-1}=y$	$\frac{d}{\eta}z^{\eta}=t$
II		$\frac{dz^{\eta-1}}{ee+2efz^{\eta}+ffz^{2\eta}}=y$	$\frac{dz^{\eta}}{\eta ee+\eta efz^{\eta}}=t$, aut $\frac{-d}{\eta ef+\eta ffz^{\eta}}=t.$
III	1	$dz^{\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{2d}{3\eta f}R^{3}=t$
	2	$dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{-4e+6fz^{\eta}}{15\eta ff}dR^{3}=t$
	3	$dz^{3\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{16ee-24efz^{\eta}+30ffz^{2\eta}}{105\eta f^{3}}dR^{3}=t$
	4	$dz^{4\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{-96e^{3}+144eefz^{\eta}-180effz^{2\eta}+210f^{3}z^{3\eta}}{945\eta f^{4}}dR^{3}=t$
IV	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{2d}{\eta f}R=t$
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{-4e+2fz^{\eta}}{3\eta ff}dR=t$
	3	$\frac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{16ee-8efz^{\eta}+6ffz^{2\eta}}{15\eta f^{3}}dR=t$
	4	$\frac{dz^{4\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{-96e^{3}+48eefz^{\eta}-36effz^{2\eta}+30f^{3}z^{3\eta}}{105\eta f^{4}}dR=t$

Ordo Curvarum	Arearum Valor
$2\theta e z^{\theta-1} \begin{matrix}+2\theta f \\ +3\eta f\end{matrix} z^{\theta+\eta-1} \quad \begin{matrix} * \\ * \end{matrix} \quad \text{in } \frac{1}{2}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$z^{\theta}R^{3} \quad = t$
$2\theta e z^{\theta-1} \begin{matrix}+2\theta f \\ +3\eta f\end{matrix} z^{\theta+\eta-1} \begin{matrix}+2\theta g \\ +6\eta g\end{matrix} z^{\theta+2\eta-1} \quad \text{in } \frac{1}{2}\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$	$z^{\theta}R^{3} \quad = t$
$\frac{2\theta e z^{\theta-1}+\overline{2\theta+\eta}\times fz^{\theta+\eta-1}}{2\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$z^{\theta}R \quad = t$
$\frac{2\theta e z^{\theta-1}+\overline{2\theta+\eta}\times fz^{\theta+\eta-1}+\overline{2\theta+2\eta}\times gz^{\theta+2\eta-1}}{2\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=y$	$z^{\theta}R \quad = t$
$\frac{2\theta e z^{\theta-1}+\overline{2\theta-\eta}\times fz^{\theta+\eta-1}}{\overline{e+fz^{\eta}}\times 2\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{z^{\theta}}{R} \quad = t$
$\frac{2\theta e z^{\theta-1}+\overline{2\theta-\eta}\times fz^{\theta+\eta-1}+\overline{2\theta-2\eta}\times gz^{\theta+2\eta-1}}{\overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}\times 2\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=y$	$\frac{z^{\theta}}{R} \quad = t$
$\frac{2\theta e z^{\theta-1}+\overline{2\theta-2\eta}\times fz^{\theta+\eta-1}}{ee+2efz^{\eta}+ffz^{2\eta}}=2y$	$\frac{z^{\theta}}{RR} \text{ aut } \left(\frac{z^{\theta}}{e+fz^{\eta}}\right)=t$
$\frac{2\theta e z^{\theta-1}+\overline{2\theta-2\eta}\times fz^{\theta+\eta-1}+\overline{2\theta-4\eta}\times gz^{\theta+2\eta-1}}{ee+2efz^{\eta}+\overline{ff+2eg}\times z^{2\eta}+2fgz^{3\eta}+ggz^{4\eta}}=2y$	$\frac{z^{\theta}}{RR} \text{ aut } \frac{z^{\theta}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=t$
$2\theta ehz^{\theta-1} \begin{matrix} \\ +\overline{2\theta+\eta}\times ei\end{matrix} +\overline{2\theta+3\eta}\times fhz^{\theta+\eta-1}+\overline{2\theta+4\eta}\times fiz^{\theta+2\eta-1} \quad \text{in } \frac{\sqrt{e+fz^{\eta}}}{2\sqrt{b+iz^{\eta}}}=y$	$z^{\theta}R^{3}p \quad = t$
$2\theta ebz^{\theta-1} \begin{matrix} \\ +\overline{2\theta-\eta}\times ei\end{matrix} +\overline{2\theta+3\eta}\times fhz^{\theta+\eta-1}+\overline{2\theta+2\eta}\times fiz^{\theta+2\eta-1} \quad \text{in } \frac{\sqrt{e+fz^{\eta}}}{\overline{b+iz^{\eta}}\times\sqrt{b+iz^{\eta}}}=y$	$\frac{z^{\theta}R^{3}}{p} \quad = t$

Addere potuiſſem alia plura ejuſdem generis: ſed jam tranſire libet ad aliud Curvarum genus, quæ cum Sectionibus conicis comparari poſſunt. Curvæ omnes, de quibus agit ſequens Catalogus

TAB. VI. aut Tabula, repræſentantur (*Fig.* 41.) Lineis QEχR. Harum Abſciſſæ incipiunt ab A, & ſunt AC, Ordinatæ CE, initium Areæ $\alpha\chi$, & Area deſcripta $\alpha\chi$EC. At initium Areæ, vel primus Terminus (qui plerumque aut initium ducit ab Abſciſſæ initio A, aut ab eo diſtat per infinitum intervallum,) invenitur repertâ Longitudine Abſciſſæ Aα, cùm Areæ valor evaneſcit & erectâ Perpendiculari $\alpha\chi$.

TAB. VI. Eodem pacto habes Sectiones conicas repræſentatas (*Fig.* 42. *Nis.* 1.2.3.4.) Lineis PDG quarum Centrum eſt A, Vertex a, Semidiametri rectangulares Aa & AP, initium Abſciſſæ A aut a aut α, Abſciſſa AB vel aB vel αB, Ordinata BD, Tangens DT, quæ occurrit ipſi AB in T, ſubtenſa aD, & Rectangulum inſcriptum aut circumſcriptum ABDO.

Servatis igitur ſymbolis ſupra conſtitutis, erit AC $= z$; CE $= y$; $\alpha\chi$EC $= t$; AB vel aB $= x$; BD $= u$; & ABDP aut aGDB $= s$. Et præterea, ſi quando duæ Sectiones conicæ neceſſariæ erunt ad Aream aliquam determinandam; Area ſecunda dicetur σ, ejus Abſciſſa ξ, & Ordinata γ. Ponitur autem p pro $\sqrt{ff - 4eg}$.

Tab. II.

Digitized by Google

nſtructa per Probl. VIII.

Arearum Valor.	Fig.
$= \underline{\alpha GDB}$	N°. 1.
$ux - \frac{fu}{4e} + \frac{ffu}{4eex} = t = \frac{8dee}{\eta ff}$ in $AGDa + \frac{ffu}{4eex}$	N°. 3. 4.
$t = \frac{2d}{\eta} APDB$, ſeu $\frac{2d}{\eta} aGDB$	N°. 2. 3. 4.
$\frac{1}{2} xu - \frac{fu}{2e} = t = \frac{4de}{\eta f} \times aGDK$	N°. 3. 4.
$= \frac{d}{\eta} \times - aGDB$, aut $BDPK$	N°. 4.
$= t$	
$u \div s = t = \frac{4d}{\eta f}$ in PAD, aut in $aGDA$	N°. 2. 3. 4.
$\frac{1}{2} xu - \frac{fu}{4e} = t = \frac{8de}{\eta ff}$ in $aGDA$	N°. 3. 4.
$xu = t = \frac{2d}{\eta e}$ in POD, aut in $AODGa$	N°. 2. 3. 4
$u \div s = t = \frac{4d}{\eta f}$ in $aDGa$	N°. 3. 4.
$2xu = t = \frac{d}{[illegible]}$ in $3aDGa \div aDB$ Triang.	N°. 3.
$= t$	
$+ 2\xi\gamma = t$	

Digitized by Google

I I.

Digitized by Google

AREARUM VALOR. *Fig.* 41.

$$\frac{4dee\xi\gamma + 2def\gamma - 2dfgux \begin{smallmatrix} +4degu \\ -2dffu \end{smallmatrix} - 8dee\sigma + 4dfgs}{4\eta eg - \eta ff} = t$$ N°. 2. 3. 4.

$$\frac{d}{\eta}s = t = \frac{d}{\eta} \times \alpha GDB$$ N°. 3. 4.

$$\frac{d}{3\eta g}u^3 - \frac{df}{2\eta g}s = t$$ N°. 2. 3. 4.

$$\frac{6dgx - 5df}{24\eta gg}u^3 + \frac{5dff - 4deg}{16\eta gg}s = t$$ N°. 3. 4.

$$\frac{8dgs - 4dgux - 2dfu}{4\eta eg - \eta ff} = s = \frac{8d\rho}{4e\eta g - \eta ff} \times \alpha GDB \pm DBA$$ Triang. N°. 3. 4.

$$\frac{-4dfs + 2dfux + 4deu}{4\eta eg - \eta ff} = t$$

$$\frac{\begin{smallmatrix} +3dff \\ -4de\rho \end{smallmatrix} s \begin{smallmatrix} -2dff \\ +4deg \end{smallmatrix} ux - 2defu}{4\eta egg - \eta ffg} = t$$

$$\frac{\begin{smallmatrix} +36defg \\ -15df^3 \end{smallmatrix} s \begin{smallmatrix} +8degg \\ -2dffg \end{smallmatrix} uxx \begin{smallmatrix} +10df^3 \\ -28defg \end{smallmatrix} ux \begin{smallmatrix} +10deff \\ -16deeg \end{smallmatrix} u}{24\eta eg^3 - 6\eta ffgg} = t$$

$$\frac{\begin{smallmatrix} +4fg \\ -4eb \end{smallmatrix} s \begin{smallmatrix} -2fg \\ +2eb \end{smallmatrix} ux + \frac{2dfu}{x}}{\eta fb} = t$$

$$\frac{\begin{smallmatrix} +4egb \\ -4fgg \end{smallmatrix} s \begin{smallmatrix} -2egb \\ +2fgg \end{smallmatrix} ux + \frac{2}{3}db\frac{u^3}{x^3} - 2dfg\frac{u}{x}}{\eta fbb} = t$$

$\eta ux - \Delta s$ Δ

$$\frac{dbu^3x \begin{smallmatrix} -3dfg \\ -deb \end{smallmatrix} s}{2\eta fbb} = t$$

Digitized by Google

Digitized by Google

Antequam ad Exemplis illuſtranda Theoremata in hiſce Curvarum claſſibus tradita pertranſeam, obſervandum puto, quòd.

I.

Cùm in Æquationibus Curvas exprimentibus ſemper poſuerim omnia Quantitatum d; e; f; g; h, & i, ſigna affirmativa, ſi quando ea negativa occurrunt, mutanda ſunt in ſubſequentibus valoribus Abſciſſæ & Ordinatæ ad conicam Sectionem pertinentium, atque etiam Areæ quæſitæ.

I I.

Quinetiam cùm ſigna ſiymbolorum Numeralium η & θ negativa ſunt, mutari debent in Arearum valoribus. His autem ſignis mutatis, Theoremata ipſa novam formam induunt.

Sic, ſi ſignum ipſius η mutetur in quartâ formâ Tabulæ II, tertium Theorema evadit $\frac{d}{z^{-2\eta+1}\sqrt{e+fz^{-\eta}}} = y$; $\frac{1}{z^{-\eta}} = x$, &c., id eſt, $\frac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{ez^{2\eta}+fz^{\eta}}} = y$; $z^{\eta} = x$; $\sqrt{fx+exx} = v$; $\frac{d}{\eta e}\times\overline{2vx-3s} = t$. Quod in ceteris quoque obſervandum eſt

I I I.

Series ſingulorum ordinum, præter ſecundum Tabulæ I, continuari in infinitum utrimque poſſunt. Etenim in Seriebus tertii & quarti ordinis Tabulæ I. Numerales primorum Terminorum Coefficientes (2; -4; 16; -96; 768; &c.,) conflantur continuâ Multiplicatione Numerorum -2; -4; -6; -8; -10; &c., & Coefficientes ſequentium Terminorum deducuntur ex priorum Coefficientibus, in tertio quidem ordine, eos gradatim multiplicando per $-\frac{3}{2}$; $-\frac{5}{4}$; $-\frac{7}{6}$; $-\frac{9}{8}$; $-\frac{11}{10}$; $-\frac{13}{12}$; &c.,

&c., & in quarto per $-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{4}$; $-\frac{5}{6}$; $-\frac{7}{8}$; $-\frac{9}{10}$; $-\frac{11}{12}$; &c.; At Denominatorum Coefficientes 1; 3; 15; 105; &c., conficiuntur invicem gradatim multiplicando Numeros 1; 3; 5; 7; 9; &c.

Veniamus ad Tabulam II. Series Ordinum primi, ſecundi, tertii, quarti, noni, & decimi, in infinitum producuntur ſolâ Diviſione. Habes, *ex. gr.* in primo ordine $\frac{dz^{4\eta-1}}{e+fz^\eta}=y$; unde, ſi Diviſionem protrahas ad convenientem periodum, aſſequeris

$$\frac{d}{f}z^{3\eta-1}-\frac{de}{ff}z^{2\eta-1}+\frac{dee}{f^3}z^{\eta-1}-\frac{\frac{de^3}{f^3}z^{\eta-1}}{e+fz^\eta}=y.$$

Tres primi Termini ſpectant ad primum Ordinem Tabulæ I. & quartus ad primam Speciem hujus Ordinis. Hinc patet quòd Area eſt $\frac{d}{3\eta f}z^{3\eta}-\frac{de}{2\eta ff}z^{2\eta}+\frac{dee}{\eta f^3}z^\eta-\frac{e^3}{\eta f^3}s$, ponendo s pro Areâ Sectionis conicæ, cujus Abſciſſa eſt $x=z^\eta$ & Ordinata $u=\frac{d}{e+fx}$.

Series autem Ordinum quinti & ſexti continuari poſſunt in infinitum ope duorum Theorematum conſtituentium quintum Ordinem Tabulæ I. per legitimam Additionem & Subſtractionem. Series autem ſeptimi & octavi ope Theorematum ſexti Ordinis Tabulæ I. & & Series undecimi, auxilio Theorematis decimi Ordinis ejuſdem Tabulæ I.

Continuanda ſit, *ex gr.*, Series tertii Ordinis Tabulæ II. ſuppone $\theta=-4\eta$, & primum Theorema quinti Ordinis Tabulæ I. fiet

$$\overline{-8\eta ez^{-4\eta-1}-5\eta fz^{-3\eta-1}}\times\frac{1}{2}\sqrt{e+fz^\eta}=y;\ \frac{R^3}{z^{4\eta}}=r.$$

Sed juxta quartum Theorema hujus Seriei producendæ, ſcribendo $-\frac{5\eta f}{2}$ pro d, eſt $-\frac{5\eta}{2}fz^{-3\eta-1}\sqrt{e+fz^\eta}=y$; $\frac{1}{z^\eta}=x$;

$\sqrt{fx}$

Fig. 37.

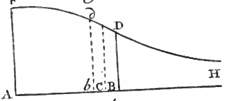
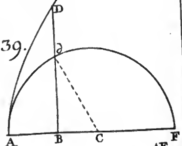


Fig. 39.



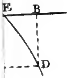
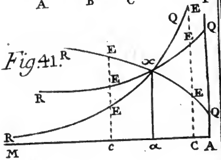
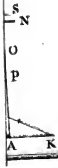


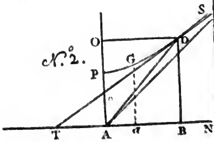
Fig. 41.



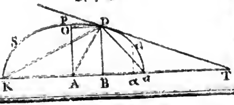
g. 42.



N.° 2.



N.° 4.



$\sqrt{fx + exx} = u$; & $\frac{10fu^3 - 15ffs}{12e} = t$, ergo ſubtrahendo primos valores y & t, ſupereſt $4\eta e z^{-4\eta - 1} \sqrt{e + fz^\eta} = y$; $\frac{10fu^3 - 15ffs}{12e} - \frac{R^3}{z^{4\eta}} = t$. His multiplicatis per $\frac{d}{4\eta e}$, & (ſi libet) pro $\frac{R^3}{z^{4\eta}}$ ſcripto $u^3 x$, prodibit quintum Theorema Seriei producendæ, nempe $\frac{d}{z^{4\eta+1}} \sqrt{e + fz^\eta} = y$; $\frac{1}{z^\eta} = x$; $\sqrt{fx + exx} = u$; & $\frac{10dfu^3 - 15dffs}{48\eta ee} - \frac{du^3 e}{4\eta e} = t$.

I V.

Plures ex his Ordinibus poſſunt etiam aliter ex aliis excudi. Sic, in Tabulâ II. quintus, ſextus, ſeptimus, & undecimus ex octavo, & nonus ex decimo: Ita ut eos omiſiſſe potuiſſem, niſi poſſent eſſe alicujus utilitatis, quamquam non omninò neceſſarii ſint. Omiſi tamen plures Ordines quos educere potuiſſem ex primo & ſecundo, ut & ex nono & decimo ob Denominatores complicatos nimis, quibus afficiuntur, quâ de cauſâ non facilè utiles eſſe poſſunt.

V.

Si Æquatio Curvam definiens compoſita eſt ex pluribus Æquationibus diverſorum Ordinum aut diverſarum Specierum ejuſdem ordinis, ejus Area pariter compoſita erit ex correſpondentibus Areis. Semper autem curandum eſt ut eæ rectè connectantur aptis ſignis. Nam, non ſemper unà addendæ, aut ſubducendæ ſunt Ordinatæ ex Ordinatis, & correſpondentes Areæ ex Areis; ſed aliquando harum ſumma, & illarum Differentia ſumi debet ad conſtituendam novam Ordinatam aut Aream correſpondentem. Et hoc fieri debet, quando Areæ poſitæ ſunt ad contrarias Ordinatæ partes. Sed ut cautus Geometra faciliùs vitare poſſit hos ſcopulos, præfixi apta ſigna variis Arearum valoribus, licèt aliquando eæ forent negativæ, ut feci in quinto & ſeptimo Ordine Tabulæ II.

VI.

Præterea, circa Arearum Signa animadvertendum eſt, quòd $+t$ æquè denotat, aut quòd Area Sectionis conicæ pertinens ad Abſciſſam, de quâ agitur, addi debet alteri Quantitati in valore ipſius t; (vide primum ex Exemplis ſequentibus); aut quòd ſubtrahi debet Area poſita ad alteram ab Ordinatâ partem. Et vice verſâ $-t$ ambiguè denotat tum, quòd Area adjacens Abſciſſæ ſubtrahenda eſt, tum, quòd Area ad alteram Ordinatæ partem poſita, addenda eſt, ut conveniens videtur. Pariter valor ipſius t, ſi prodit affirmativus, indicat Aream Curvæ adjacere Abſciſſæ; Et è contra, ſi negativus eſt, eam jacere ad alteram ab Ordinatâ partem.

VII.

Sed, ut hæc Area certiùs definiatur, quærendi tibi ſunt ejus Limites. Hi autem Limites, (quod ſpectat ad Abſciſſam, Ordinatam, & Curvæ Perimetrum,) incerti, aut ambigui nequeunt eſſe; Sed Limes initialis, aut initium unde Curva incipit deſcribi, habere poteſt plures ſitus. In Exemplis ſequentibus, Limes hic eſt aut ad initium Abſciſſæ, aut ab eo diſtat intervallo infinito, aut ad Punctum, in quo Curva concurrit cum Abſciſſâ. At eſſe poteſt ubicunque; &, ubicunque tamen ille ſit, inveniri poteſt quærendo Longitudinem, quâ gaudet Abſciſſa quando valor ipſius t nihilo æqualis eſt, & inde agendo Ordinatam. Nam, Ordinata ſic ducta erit Limes quæſitus.

VIII.

Si aliqua pars Areæ jacet infra Abſciſſam, t indicat differentiam hujus partis, ab illâ, quæ eſt ſupra Abſciſſam.

IX.

Si quando in valoribus ipſarum x; u; & t; Terminorum Dimenſiones aut nimium aſcendunt, aut nimium deſcendunt, revocari poſ-

poſſunt ad juſtum gradum, Terminos aliquâ datâ Quantitate, quæ concipi poteſt fungi munere Unitatis, toties dividendo, aut multiplicando, quoties opus eſt ad Exponentes æquandos.

X.

Præter ſuperiores Catalogos aut Tabulas, conſtrui poſſunt Tabulæ Curvarum relatarum ad alias Curvas, in ſuo genere, ſimpliciores; puta ad $\sqrt{a + fx^2} = u$; aut ad $x\sqrt{e + fx^2} = u$; aut ad $\sqrt{e + fx^4} = u$; &c. Ita ut ſimul derivare liceat Aream Curvæ propoſitæ ex modulo ſimpliciori, & noſcere ad quas Curvas ea referatur. Sed jam, quæ ſupra tradidimus, Exemplis illuſtremus.

Exempl. I.

Sit (*Fig.* 43.) QER Curva Conchoïdalis ejus naturæ, ut deſcripto Semicirculo QHA, & actâ AC Perpendiculari ad Diametrum AQ, ſi compleatur Parallelogrammum QACI, & ducatur ejus Diagonalis AI, quæ Semicirculum ſecat in H, ac demittatur ex H ſuper IC ad rectos Angulos HE, Punctum E tangat hanc Curvam, cujus quæritur Area ACEQ. TAB. VII.

Idcirco fac $AQ = a$; $AC = z$; $CE = y$; &, ob continuè Proportionales IA; AQ; HA; EC, erit EC, aut $y = \frac{a^3}{aa + zz}$.

Nunc, ut hæc Æquatio induat formam illarum, quæ ſunt in Tabulis, pone $\eta = 2$; & pro z^2 ſcribe in Denominatore z^η; atque in Numeratore $a^3 z^{\frac{1}{2}\eta - 1}$ pro a^3, aut $a^3 z^{1-1}$, unde orietur $y = \frac{a^3 z^{\frac{1}{2}\eta - 1}}{aa + z^\eta}$, Æquatio primæ Speciei ſecundi Ordinis Tabulæ II, &, per Comparationem Terminorum, habebis $d = a^3$; $e = aa$; & $f = 1$; quapropter $\sqrt{\frac{a^3}{aa + zz}} = x$; $\sqrt{a^3 - aaxx} = u$; & $ux - 2s = t$. Jam, ut inventi valores x, & u, redigantur ad juſtum Dimenſionum numerum, elige aliquam datam Quantita-

 tem,

tem, ut a, per quam, tanquam per Unitatem in valore ipſius x, ſemel a^2 multiplicetur, in valore autem u, dividantur a^3 quidem ſemel, ſed $aaxx$ bis. Unde obtinebis $\sqrt{\frac{a^4}{aa + zz}} = x$; $\sqrt{aa - xx} = u$; & $ux - 2s = t$: En autem Conſtructionem.

Centro A, Radio AQ deſcribe Circuli Quadrantem QDP; ex AC abſcinde AB = AH, educ Perpendicularem BD Arcui occurrentem in D, & junge AD. Dico, quòd duplex Sector ADP æquat Aream quæſitam ACEQ. Nam, quia $\sqrt{\frac{a^4}{aa + zz}} = (\sqrt{AQ \times EC} = HA =)\ AB = x$; & $\sqrt{aa - xx} = (\sqrt{ADq - ABq} =)$ BD aut u; atque $ux - 2s =$ bis Triang. ADB − 2ABDQ; aut = bis Triang. ADB + 2BDP; hæc Area eſt æqualis ſive − 2QAD, ſive + 2DAP; Quorum valorum affirmativus 2DAP, pertinet ad Aream ACEQ hinc ab EC; & negativus − 2QAD ad Aream RCER, quæ in infinitum protenditur ultra EC.

At hæ Problematum Solutiones ita repertæ aliquando majori elegantiâ donari poſſunt. Ut nunc, ductâ HR Semidiametro Circuli QHA, erit, ob æquales Arcus QH, & DP, Sector QHR ſemiſſis Sectoris DAP, & ideo Quadrans Superficiei ACEQ.

Exempl. II.

TAB. VII. Sit (*Fig.* 44.) AGE Curva deſcripta à Puncto E, quod eſt ad Verticem Anguli recti AEF, cujus alterum latus AE indefinitum ſemper tranſit per datum Punctum A, alterum verò FE datæ Longitudinis labitur ſuper indefinitam Rectam AF poſitione datam; Demitte EH ad rectos Angulos ſuper AF, & comple Parallelogrammum AHEC; Jam dictis AC = z; CE = y; & EF = a; Quia FH; HE; HA ſunt in proportione continuâ, erit HA aut

$$y = \frac{zz}{\sqrt{aa - zz}}.$$

Nunc, ut cognoſcamus Aream AGEC, pone $zz = x^{\eta}$; aut $z = \eta$;

$a = \eta$; quapropter erit $\frac{z^{\frac{3}{2}\eta - 1}}{\sqrt{aa - z^{\eta}}} = y$. Cùm autem hìc z habeat in Numeratore fractam Dimenſionem, deprime valorem y, eum dividendo per $z^{\frac{1}{2}\eta}$, & obtinebis $\frac{z^{\eta - 1}}{\sqrt{aaz^{-\eta} - 1}} = y$, Æquationem ſecundæ Speciei ſeptimi Ordinis Tabulæ II. Terminis autem comparatis, invenimus $d = 1$; $e = -1$; & $f = aa$.

Eſt igitur $zz = (\frac{1}{z^{-\eta}} =) \, xx$; $\sqrt{aa - xx} = u$; & $s - ux = t$. Quapropter, cùm x, & z ſimul æquentur, & cùm $\sqrt{aa - xx} = u$ ſit Æquatio ad Circulum, cujus Semidiameter eſt a, Centro A, Radio EF, aut a, deſcribe Circulum PDQ, quem CE ſecet in D, & compleatur Parallelogrammum ACDI; Tunc erit $AC = z$; $CD = u$; & Area quæſita $AGEC = s - ux = ACDP - ACDI = IDP$.

Exempl. III.

Sit (*Fig.* 45.) AGE Ciſſois pertinens ad Circulum ADQ deſcriptum Diametro AQ. Agatur DCE ad rectos Angulos ſuper Diametrum, & quæ ſecet has Curvas in D, & E. Jamque, vocatis $AC = z$; $CE = y$; & $AQ = a$; Cùm ſint CD; AC; CE continuè proportionales, erit CE, ſive $y = \frac{zz}{\sqrt{az - zz}}$; & (dividendo per z) $y = \frac{z}{\sqrt{az^{-1} - 1}}$. Igitur $z^{-1} = z^{\eta}$, aut $\eta = -1$; & ideo $y = \frac{z^{-2\eta - 1}}{\sqrt{az^{\eta} - 1}}$, quæ Æquatio eſt tertiæ ſpeciei, quarti Ordinis Tabulæ II. Quapropter, per Terminorum Comparationem, eſt $d = 1$; $e = -1$; & $f = a$; Ergo $z = \frac{1}{z^{\eta}} = x$; $\sqrt{ax - xx} = u$; & $3s - 2ux = t$. Quâ de TAB. VII.

cauſâ eſt $AC = x$; $CD = u$; & ideo $ACDH = s$; itaque $3ACDH - 4ADC$ Triang. $= 3s - 2ux = t =$ Areæ Ciſſoidali A C E G A. Aut, (quod idem eſt,) ter Segmentum A D H A æquat Aream A D E G A, ſive quater Segmentum A D H A æquat Aream A H D E G A.

Exempl. IV.

TAB. VII. Sit (*Fig.*46.) P E prima Veterum Conchoïs deſcripta Centro G; Aſymptoto A L; & Intervallo L E. Age ejus Axem G A P, & demitte Ordinatam C E. Nunc appella $AC = z$; $CE = y$; $GA = b$; & $AP = c$: Proportionales $AC : CE - AL :: GC : CE$ dabunt C E, ſive $y = \frac{b+z}{z} \times \sqrt{cc - zz}$.

Jam, ut hinc excudi poſſit ejus Area P E C, ſeorſum conſiderari debent partes Ordinatæ C E. Et, ſi Ordinata C E ita dividatur in D, ut ſit $CD = \sqrt{cc - zz}$, & $ED = \frac{b}{z}\sqrt{cc - zz}$, erit C D Ordinata ad Circulum deſcriptum Centro A, & Radio A P. Quapropter Areæ pars C D P cognita eſt, & tantùm invenienda ſupereſt pars D P E D. Quia igitur Ordinatæ pars D E, quâ deſcribitur, æquivalet $\frac{b}{z}\sqrt{cc - zz}$, ſuppone $2 = \eta$, & ea fiet $\frac{b}{z}\sqrt{cc - z^{\eta}} = DE$, Æquatio primæ Speciei tertii Ordinis Tabulæ II. Terminos igitur compara, & reperies $d = b$; $e = cc$; & $f = -1$; quapropter $\frac{1}{z} = \sqrt{\frac{1}{z^{\eta}}} = x$; $\sqrt{-1 + ccxx} = u$; & $2bccs - \frac{bu^3}{x} = t$.

His autem inventis, revocandi ſunt ad juſtum Dimenſionum Numerum Termini, multiplicando ſcilicet nimium depreſſos, & dividendo nimium altos per aliquam datam Quantitatem. Hoc ſi fiat per

per c, aſſequemur $\frac{cc}{z}=x$; $\sqrt{-cc+xx}=u$; & $\frac{2bs}{c}-\frac{bu^3}{cx}=t$. Quæ Æquatio ſic poteſt conſtrui.

Centro A, præcipuo Vertice P, & Latere recto 2 A P deſcribe Hyperbolam P K. Tunc ex Puncto C age rectam C K, quæ tangat Hyperbolam in K: Eritque ut P A ad bis A G, ita Area C K P C ad Aream quæſitam D P E D.

EXEMPL. V.

Gyret (*Fig.* 47.) *Norma* G F E circa Polum G, ita ut angulare Punctum F labatur ſuper Rectâ A F poſitione datâ, & quodvis aliud Punctum E ſumptum in altero Latere E F, concipiatur deſcribere Curvam P E. TAB. VIII.

Inveſtigaturus Aream hujus Curvæ demitte G A, & E H ad rectos Angulos ſuper Rectam A F, & completo Parallelogrammo A H E C, dic G A $=b$; A C $=z$; C E $=y$; & E F $=c$. Ac, propter Proportionales F H : H E :: G A : A F, habebis A F $=\frac{bz}{\sqrt{cc-zz}}$. Igitur C E, aut $y=\frac{bz}{\sqrt{cc-zz}}-\sqrt{cc-zz}$. Sed, quia $\sqrt{cc-zz}$ eſt Ordinata ad Circulum deſcriptum Semidiametro c; Centro A deſcribatur Circulus iſte P D Q, quem C E producta ſecet in D; Tunc erit D E $=\frac{bz}{\sqrt{cc-zz}}$. Ope cujus Æquationis reliqua Area P D E P, aut D E R Q determinanda eſt. Quocirca ſuppone $\eta=2$, & $\theta=b$, & erit D E $=\frac{bz^{\eta-1}}{\sqrt{cc-z^{\eta}}}$, Æquatio primæ Speciei quarti Ordinis Tabulæ I; Nunc, per Comparationem Terminorum, invenies $b=d$; $cc=e$; & $-1=f$; ita ut $-b\sqrt{cc-zz}=-bR=t$.

Sed, quia negativus eſt valor ipſius t, & idcirco Area repræſentata per t, jacet ultra Lineam D E; ut inveniatur Limes initialis; quære cujuſnam Longitudinis ſit z; cum t evaneſcit, eámque reperies c. Produc igitur A C ad Q donec ſit A Q $=c$; & erige Ordina-

dinatam QR; & DQRED erit Area illa, cujus valor nuper inventus exprimitur per $-b\sqrt{cc-zz}$.

Si vis noſcere Quantitatem Areæ PDE poſitæ ad Abſciſſam AC, & cum eâ coextenſæ, ignoto Limite QR, eam potes hoc pacto determinare.

Ex valore, quem habet t, cùm Abſciſſa eſt ipſa AC, ſubduc valorem, quem t habet ad Abſciſſæ initium, id eſt ex $-b\sqrt{cc-zz}$, ſubtrahe $-bc$, & ſic reperies optatam Quantitatem $bc-b\sqrt{cc-zz}$. Quare, comple Parallelogrammum PAGK, & ſuper AP demitte ad rectos Angulos Rectam DM, occurrentem ipſi GK in M, erit Parallelogrammum PKML æquale Areæ PDE.

Si quando Æquatio definiens Curvæ naturam, in Tabulis nequit inveniri, nec ad ſimpliciores Terminos reduci per Diviſionem, aut per alias artes; ea transformanda eſt in alias Æquationes ad Curvas, quæ ad eam referantur, ut oſtendimus in Probl. VIII. donec tandem aliqua proveniat, cujus Area noſci poſſit ex Tabulis. Quòd ſi, licèt omnibus Laboribus exhauſtis, tamen id inveniri non poſſit, pro certo habendum eſt, quòd Curva propoſita comparari nequit, neque cum Figuris Rectilineis, neque cum Sectionibus conicis.

Eodem pacto, quando res eſt de Curvis mechanicis, eæ priùs transformandæ ſunt in æquales Figuras geometricas, ut oſtenſum eſt in eodem Probl. VIII, & deinde harum geometricarum Curvarum Areæ ſunt per Tabulas inveniendæ. Accipe hujus negotii Exemplum.

EXEMPL. VI.

Determinanda proponatur Area Figuræ Arcuum cujuſcunque Sectionis conicæ, quando ii Arcus ordinatim applicantur ad rectos earum Sinus. *Ex. gr.* Sit (*Fig.* 48.) A Centrum Sectionis conicæ, ejus Semiaxes ſint QA, & AR; CD Ordinata ad Axem AR, & PD Curvæ ad Angulos rectos occurrat in Puncto D.

TAB. VIII.

Præterea ſit AE dicta mechanica Curva, quæ ſecet CD in E; & ex ejus naturâ jam definitâ, erit CE æqualis Arcui QD. Igitur

tur determinari debet, aut Area AEC, aut, completo Parallelogrammo ACEF, exceſſus AEF. Ad quod obtinendum, ſit a Latus rectum Sectionis conicæ, & b, aut 2AQ Latus tranſverſum. Inſuper ſint AC $= z$; & CD $= y$; & erit $\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{b}{a}zz} = y$, Æquatio ad Sectionem conicam, ut omnes norunt. Sed PC $= \frac{b}{a}z$; ergo PD $= \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{bb+ab}{aa}zz}$.

Jam, quia Fluxio Arcûs QD eſt ad Fluxionem Abſciſſæ AC, ut PD eſt ad DC; ſi Fluxio Abſciſſæ ponatur æqualis Unitati; erit Fluxio Arcûs QD, aut Ordinatæ CE $= \frac{\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{bb+ab}{aa}zz}}{\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{b}{a}zz}}$.

Hanc duc in FE, aut z, & invenies $z\frac{\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{bb+ab}{aa}zz}}{\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{b}{a}zz}}$ eſſe Fluxionem Areæ AEF. Quapropter, ſi ex Ordinatâ CD abſcindis CG $= z\frac{\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{bb+ab}{aa}zz}}{\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{b}{a}zz}}$, Area ACG deſcripta ab ipſâ CG latâ per AC æquabit Aream AEF, & Curva AG erit geometrica.

Igitur invenienda reſtat Area AGC. Ut voti compos fias, ſubſtitue z^{η} pro z^{2} in ultimâ Æquatione, quæ hoc pacto evadet $z^{\eta-1}\frac{\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{bb+ab}{aa}z^{\eta}}}{\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{b}{a}z^{\eta}}} =$ CG, Æquatio ſecundæ ſpeciei

Ordinis undecimi Tabulæ II. Compara Terminos, eritque $d = 1$; $e = \frac{1}{4}bb = g$; $f = \frac{bb+ab}{aa}$, & $h = \frac{b}{a}$; itaque $\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{b}{a}zz} = x$; $\sqrt{-\frac{b^2}{4a} + \frac{a+b}{a}xx} = u$; & $\frac{a}{b}s = t$. Videlicet CD $= x$; DP $= u$, & $\frac{a}{b}s = t$. Cujus Conſtructio ſic fieri poteſt.

Ad Q erige QK perpendicularem, & æqualem ipſi QA, & per Punctum D age HI ei quidem parallelam, ſed æqualem ipſi DP. Linea KI, ad quam HI terminatur, erit Sectio conica, & Area comprehenſa HIKQ erit ad Aream quæſitam AEF ut *b*, ad *a*, aut ut PC ad CA.

Hìc animadverte, quòd, mutato ſigno ipſius *b*, Sectio conica, cujus Arcus æquat Rectam CE, evadit Ellipſis, & ſi præterea facias $b = -a$, Ellipſis abit in Circulum; & tunc Linea KI fit Recta parallela ipſi AQ.

Poſtquam Area Curvæ alicujus ita reperta eſt & conſtructa, indaganda eſt Demonſtratio Conſtructionis, ut omiſſo, quatenus fieri poteſt, Calculo algebraïco, Theorema fiat concinnum, & elegans, ac publicum lumen ſuſtinere valeat. Eſt autem generalis demonſtrandi Methodus, quam illuſtrare conabor ſequentibus Exemplis.

CONSTRUCTIONIS EXEMPLI V.

DEMONSTRATIO.

TAB. VIII. In (*Fig.* 47.) Arcu PQ, ſume Punctum *d* indefinitè propinquum Puncto D, & age *de*, ac *dm* parallelas ipſis DE, ac DM, & ſecantes DM, & AP in *p*, ac *l*. Erit DE*ed* Momentum Areæ PDEP, & LM*ml* Momentum Areæ LMKP. Age Semidiametrum AD, & concipe Arcum indefinitè exiguum D*d* eſſe Lineam rectam, ac Triangula D*pd*, & ALD ſimilia erunt, & ideo D*p*: *pd*:: AL : LD. Sed eſt FH : HE :: GA : AF; id eſt AL : LD :: ML : DE; ergo D*p* : *pd* :: ML : DE. Quapropter *p*D×DE $=$ *pd*×ML; id eſt Momentum DE*ed* æquale eſt Momento LM*ml*. Cùm autem hoc demonſtratum indeterminatè ſit de omnibus,

nibus ſimul genitis. Momentis quibuſcunque, patet quòd omnia Momenta Areæ PDEP æqualia ſunt omnibus unà ſubſurgentibus Momentis Areæ PLMK, & idcirco, quòd Areæ ipſæ compoſitæ ex his Momentis æquales ſunt. Q. E. D.

CONSTRUCTIONIS EXEMPLI III.

DEMONSTRATIO.

Sit (*Fig.* 45.) DE*ed* Momentum ſuperficiei AHDE, & A*d* DA eodem tempore genitum Momentum Segmenti ADH. Age Semidiametrum DK, & D*e* ſecet AK in *c*; eritque C*c* ad D*d* ut CD ad DK. Præterea, eſt DC : QA (2DK) :: AC : DE; ergo C*c* : 2D*d* :: CD : 2DK :: AC : DE, & $Cc \times DE = 2Dd \times AC$. Nunc ad D*d* Momentum Peripheriæ, productum, id eſt ad Tangentem Circuli, demitte ad rectos Angulos AI; & IA æquabit AC. Itaque $2Dd \times AC = 2Dd \times AI =$ quater Triang. A*d*D. Quocirca quater Triang. $AdD = Cc \times DE =$ Momento DE*ed*. Igitur quodlibet Momentum Spatii AHDE quadruplex eſt eodem tempore geniti Momenti Segmenti ADH, quamobrem totum illud Spatium quadruplex eſt totius Segmenti. Q. E. D. TAB. VII.

CONSTRUCTIONIS EXEMPLI IV.

DEMONSTRATIO.

Age (*Fig.* 46.) *ce* parallelam ipſi CE, & indefinitè parum ab eà diſſitam; duc pariter *ck* Tangentem Hyperbolæ; & demitte KM perpendicularem ad AP. Jam, ex Hyperbolæ naturà eſt CA : AP :: PA : AM, & idcirco AG*q* : GL*q* :: CA*q* : LE*q* (aut AP*q*) :: AP*q* : AM*q*, & *diviſim* AG*q* : AL*q* (DE*q*) :: AP*q*. AM*q* — AP*q* (MK*q*). Et *inverſè* GA : AP :: DE : MK: Sed Areola DE*ed* eſt ad Triangulum CK*c*, ut Altitudo DE ad ad dimidiam Altitudinem KM; id eſt, ut AG ad $\frac{1}{2}$ AP. Ergo omnia Momenta Spatii PDE ſunt ad omnia ſimul orta Momenta TAB. VII.

Spatii PKC, ut AG ad $\frac{1}{2}$ AP, quapropter tota Spatia erunt in eâdem ratione. Q. E. D.

CONSTRUCTIONIS EXEMPLI VI.

DEMONSTRATIO.

TAB.VIII. Duc *dc* Parallelam, & infinitè proximam ipſi DC (*Fig*.48.,) & Curvæ AE occurentem in *e*; atque age *bi* & *fe*, quæ ſecent DC in *p*, atque *q*. Erit per Hypotheſim, *d*D = E*q*; & quia ſimilia ſunt Triangula D*dp*, & DCP, habebis *p*D: (D*d*) E*q*:: CP: (PD) HI; itaque D*p*×HI = E*q*×CP; & propterea DP ×HI (Momentum ſcilicet ipſius HI*ib*): E*q*×AC (Momentum ipſius EF*fe*) :: E*q* × CP: E*q*× AC:: PC: CA. Et, quia PC, & CA ſunt in datâ ratione, in eâ nempè quam Latus tranſverſum habet ad rectum conicæ Sectionis DQ, ideò Momenta HI*ib*, & EF*fe* Arearum HIKQ. & AEF ſunt in eâdem ratione, ergo in hâc quoque ſunt Areæ ipſæ. *Q. E. D.*

In hoc Demonſtrationum genere, animadvertendum eſt, quòd pro æqualibus habeo Quantitates, quarum ratio eſt æqualitatis. Ea autem exiſtimanda eſt ratio æqualitatis, quæ ab æqualitate differt ratione inæquali minori, quàm quælibet aſſignabilis. Sic, in ultimâ Demonſtratione ſuppoſui rectangulum E*q*×AC, aut FE*qf* æquale Spatio FE*ef*, quia (cùm differentia E*qe* ſit iis infinitè minor, aut nihilo æqualis relata ad illa Spatia) nulla eſt inter illa inæqualitatis ratio. Eâdem ratione aſſumpſi DP×HI = HI*ib*; & ſic de ceteris.

Methodum demonſtrandi, quòd Curvarum Areæ ſunt æquales, aut in datâ ratione, ex eo quòd earum Momenta ſunt æqualia, aut in datâ ratione, uſurpavi, quia affinitatem quandam habet cum Methodis, quæ paſſim in his negotiis adhibentur.

Magis tamen genuina, & rerum naturæ conſona videtur ea, quæ profluit ex Superficierum geneſi per motum, aut Fluxiones. Ex quo fonte ſic, *Ex. gr.* deduci poſſet Demonſtratio Conſtructionis
TAB. VII. Exempli II. Ex naturâ Circuli *Fig*.44.) Fluxio Rectæ DI eſt ad Fluxio-

Digitized by Google

Fluxionem Rectæ IP, ut AI ad ID, & eſt AI: ID :: DI: CE ex Curvæ AGE naturâ; ergo $CE \times \dot{ID} = DI \times \dot{IP}$. Sed $CE \times \dot{ID}$ æquat Fluxionem Areæ ACEG, & $DI \times \dot{IP}$ æquat Fluxionem Areæ PDI; Ergo Areæ iſtæ genitæ Fluxionibus æqualibus debent eſſe æquales. *Q. E. D.*

Ut major lux his affundatur, addam Demonſtrationem Conſtructionis, quâ determinavimus Aream Ciſſoïdis in Exemplo III. Deletæ concipiantur in Schemate (*Fig*.45.) Lineæ ſolis Punctis indicatæ. TAB. VII. Age Chordam DQ, & Rectam QR, quæ eſt Ciſſoïdis Aſymptotus. Nunc, ex Circuli naturâ, eſt $DQq = AQ \times QC$. Ergo (per Probl. I.) $2DQ \times \dot{QD} = AQ \times \dot{QC}$. Quapropter $AQ : QD :: 2\dot{DQ} : \dot{QC}$. Rurſum, ex Ciſſoïdis naturâ, eſt $ED : DA :: AQ : QD$; ergo $ED : DA :: 2\dot{DQ} : \dot{QC}$, ac $ED \times \dot{QC} = AD \times 2\dot{DQ} = 4 \times \frac{1}{2} AD \times \dot{DQ}$. Jam, quia DQ perpendicularis eſt ad extremitatem ipſius DA gyrantis circa A; & $\frac{1}{2} AD \times \dot{QD}$ æquat Fluxionem, quæ gignit Aream ADOQ, atque ejus Quadruplex $ED \times \dot{CQ}$ æqualis eſt Fluxioni generanti Aream ciſſoïdalem QREDO; Igitur hæc Area QREDO in infinitum protenſa gignitur Quadruplex alterius ADOQ. *Q. E. D.*

S C H O L I U M.

Ope Superiorum Tabularum, non ſolùm Curvarum Areæ, ſed etiam Quantitates alterius generis, quæ gignuntur analogâ fluendi ratione, deduci poſſunt ex earum Fluxionibus, & id per hoc Theorema; nempe, Quantitas cujuſcunque generis, eſt ad Unitatem ejuſdem generis, ut Area cujuſvis Curvæ eſt ad Unitatem ſuperficialem, dummodo Fluxio generans hanc Quantitatem ſit ad Unitatem ſui generis, ut Fluxio generans Aream eſt ad Unitatem pariter ſui generis; id eſt, ut Recta perpendiculariter lata per Abſciſſam, (ſive

Ordinata,) quâ Area deſcribitur eſt ad Unitatem linearem Quapropter, ſi quælibet Fluxio exponatur per hanc mobilem Ordinatam, Quantitas genita hac Fluxione exponetur per Aream ab hac Ordinatâ deſcriptam, aut, ſi Fluxio exponatur per eoſdem algebraïcos Terminos, qui exponunt Ordinatam, genita Quantitas per eos exponetur, qui exponunt Aream deſcriptam. Igitur quærenda eſt in primâ Tabularum Columnâ Æquatio, quæ exhibet Fluxionem cujuſvis generis, & valor ipſius t, qui eſt in ultimâ Columnâ exprimet Quantitatem genitam.

Exhibeat, *Ex. gr.* $\sqrt{1 + \frac{9z}{4a}}$ Fluxionem alicujus generis, eam fac æqualem y, & ut revocetur ad Formam Æquationum, quæ ſunt in Tabulis, ſcribe z^{η} pro z, & prodibit $z^{\eta - 1} \sqrt{1 + \frac{9}{4a} z^{\eta}} = y$, Æquatio primæ Speciei tertiī Ordinis Tabulæ I. Comparatis verò Terminis, conficietur $d = 1$; $e = 1$; $f = \frac{9}{4a}$; & propterea $\frac{8a + 18z}{27} \times \sqrt{1 + \frac{9z}{4a}} = \frac{2d}{3\eta f} R^{1} = t$. Ergo Quantitas $\frac{8a + 18z}{27} \times \sqrt{1 + \frac{9z}{4a}}$ ea eſt, quæ generatur Fluxione $\sqrt{1 + \frac{9z}{4a}}$.

Eodem pacto ſi $\sqrt{1 + \frac{16 z^{\frac{2}{3}}}{9 a^{\frac{2}{3}}}}$ exprimit Fluxionem aliquam, legitimè reducendo hanc Æquationem, (aut ponendo $z^{\frac{2}{3}}$ extra ſignum, & ſcribendo z^{η} pro $z^{-\frac{2}{3}}$,) habebitur $\frac{1}{z^{\eta + 1}} \sqrt{z^{\eta} + \frac{16}{9 a^{\frac{2}{3}}}} = y$, Æquatio ſecundæ Speciei quinti Ordinis Tabulæ II.

Collatio Terminorum dat $d = 1$; $e = \frac{16}{9 a^{\frac{2}{3}}}$; & $f = 1$. Eſt igitur $z^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{z^{\eta}} = xx$; $\sqrt{1 + \frac{16 xx}{9 a^{\frac{2}{3}}}} = s$; & $\frac{3}{2} s = \frac{-2d}{\eta} s = t$. Quibus inventis, cognita erit Quantitas genita Fluxione

$\sqrt{1 +}$

$\sqrt{1+\frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}$, eam faciendo ad Unitatem ſui generis, ut Area $\frac{3}{2}s$ eſt ad Unitatem ſuperficialem, aut, (quod in idem recidit,) ſupponendo s non amplius indicare Superficiem, ſed Quantitatem alterius generis, quæ eſt ad Unitatem ſui generis, ut hæc Superficies ad Unitatem Superficierum.

Sic, ſi ſupponas, quod $\sqrt{1+\frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}$ exponit Fluxionem linearem, intellige s non amplius exprimere Superficiem, ſed Lineam, quæ *ex. gr.* ſit ad Unitatem linearem, ut Area, quæ (ſecundùm Tabulas) exponitur per s, eſt ad ſuperficialem Unitatem, aut quæ invenitur applicando hanc Aream Unitati lineari. Tunc, ſi hæc Unitas linearis ponatur $= e$; Longitudo genita à præcedente Fluxione erit $= \frac{3s}{2e}$. Atque his Fundamentis poſſunt hæ Tabulæ utiles eſſe ad determinandam Curvarum Longitudinem, Soliditatem Solidorum ab iis genitorum, & quaſcunque alias Quantitates, æquè bene ac Areas Curvarum.

De Quæſtionibus, quæ ad has referuntur.

I.

Mechanicè invenire per approximationem Areas Curvarum.

Tota Methodus in eo verſatur, ut valores duarum, aut plurium Figurarum rectilinearum jungantur, ita ut quamproximé conſtituant quæſitum Areæ curvilineæ valorem.

Sic (*Fig.* 49.) in Circulo AFD, qui exprimitur Æquatione TAB.VIII. $x - xx = zz$, invento valore Areæ AFDB, videlicet $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$, &c. inveniendi ſunt valores plurium

Rectan-

Rectangulorum, qualia ſunt $x\sqrt{x - xx}$, aut $x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{9}{2}}$; &c., valor ipſius $DB \times BA$; & $x\sqrt{x}$ aut $x^{\frac{3}{2}}$; valor ipſius $DA \times AB$. Deinde hi valores multiplicandi ſunt per aliquas diverſas litteras, quæ gerunt vicem Numerorum indefinitè, & ſimul addendi, hujúſque ſummæ Termini comparandi ſunt correſpondentibus Terminis valoris Areæ AFDB, ut ad æqualitatem accedant, quantùm fieri poteſt. Multiplicentur *Ex. gr.* hæc Parallelogramma per e & f; erit eorum ſumma $\begin{matrix}+e\\+f\end{matrix} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}ex^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}ex^{\frac{7}{2}}$; &c., qui Termini comparati cum his $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}$; &c., ſuppeditant $e + f = \frac{2}{3}$; & $-\frac{1}{2}e = -\frac{1}{5}$; aut $e = \frac{2}{5}$, & $f = \frac{2}{3} - e = \frac{4}{15}$. Quapropter $\frac{2}{5}DB \times BA + \frac{4}{15}DA \times AB =$ Areæ AFDB, quàm proximè. Nam $\frac{2}{5}DB \times BA + \frac{4}{15}DA \times AB = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{40}x^{\frac{9}{2}}$; &c., quo valore ſubducto ex Areâ AFDB reſtat ſolùm error $\frac{1}{20}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{90}x^{\frac{9}{2}}$; &c.

TAB. VIII. Pariter (*Fig.* 49.), Si AB bifariam ſecta eſſet in E, valor Rectanguli $AB \times DE$ eſſet $x\sqrt{x - \frac{3}{4}xx}$, aut $x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{9}{128}x^{\frac{7}{2}} - \frac{27}{1024}x^{\frac{9}{2}}$; &c., quod collatum cum Rectangulo $DA \times AB$ præbet $\frac{8DE + 2AD}{15}$ in $AB =$ Areæ AFDB, & error eſt ſolùm $\frac{1}{560}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{5760}x^{\frac{9}{2}}$; &c., qui ſemper minor eſt, quàm $\frac{1}{1500}$ pars totius Areæ, etiam quando AFDB eſt Circuli Quadrans. Sed hoc Theorema poteſt ita proponi. Ut 3 eſt ad 2, ita

ita Rectangulum ex A B in D E unà cum quintâ parte Differentiæ, quæ eſt inter A D, & D E ad Aream A F D B quàmproximè.

Et ſic in unum conjiciendo duo Rectangula $AB \times ED$, & $AB \times BD$, aut tria Rectangula, aut ſumendo ſemper plura Rectangula, confici poſſunt aliæ Regulæ, quæ eò accuratiores erunt, quò plura Rectangula adhibebuntur. Idem intelligendum eſt de Areâ Hyperbolæ; & quarumlibet aliarum Curvarum. Quinimo ſæpè uno Rectangulo poteſt Area commodè exhiberi, ut in Circulo, de quo ſupra, ſumendo E B ad B A, ut $\sqrt{10}$ ad 5, erit Rectangulum $AB \times ED$ ad Aream A F D B, ut 3 ad 2, & error ſolùm erit $\frac{1}{175} x^{\frac{7}{2}} + \frac{11}{2250} x^{\frac{9}{2}}$; &c.

I I.

Areâ datâ determinare Abſciſſam, & Ordinatam.

Nulla eſt difficultas, quando Area exprimitur Æquatione finitâ: Sed quando ea exponitur per infinitam Seriem, extrahi debet Radix affecta, quæ denotat Abſciſſam. Sic pro Hyperbolâ, quam definit Æquatio $\frac{ab}{a+x} = \dot{z}$, poſtquam inveneris $z = bx - \frac{bxx}{2a} + \frac{bx^3}{3aa} - \frac{bx^4}{4a^3}$; &c., ſi ex datâ Areâ vis invenire Abſciſſam x, extrahe Radicem affectam, & habebis $x = \frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{96a^4b^5}$; &c., & præterea ſi noſcere cupis Ordinatam $\dot{z}$, divide ab per $a+x$, id eſt per $a + \frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4}$; &c., unde fiet $\dot{z} = b - \frac{z}{a} - \frac{zz}{2aab} - \frac{z^3}{6a^3bb} - \frac{z^4}{24a^4b^3}$; &c.

Eodem pacto in Ellipſi, quæ determinatur Æquatione $ax - \frac{a}{c} \times$

$xx = \dot{z}\dot{z}$, poſtquam inventa fuerit Area $z = \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}}{5c} - \frac{a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{7}{2}}}{28cc} - \frac{a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{9}{2}}}{72c^3}$; &c., ſcribe u^3 pro $\frac{3z}{2a^{\frac{1}{2}}}$, & t pro $x^{\frac{1}{2}}$, ea fit $u^3 = t^3 - \frac{3t^5}{10c} - \frac{3t^7}{56cc} - \frac{t^9}{48c^3}$; &c., &, extractâ Radice, $t = u + \frac{u^3}{10c} + \frac{81u^5}{1400cc} + \frac{1171u^7}{25200c^3}$; &c., cujus Quadratum $uu + \frac{u^4}{5c} + \frac{22u^6}{175cc} + \frac{823u^8}{7875c^3}$; &c., æquale eſt x; & hoc valore poſito pro x, in Æquatione $ax - \frac{a}{c}xx = \dot{z}\dot{z}$, & extractâ Radice, conficitur $\dot{z} = a^{\frac{1}{2}}u - \frac{2a^{\frac{1}{2}}u^3}{5c} - \frac{38a^{\frac{1}{2}}u^5}{175cc} - \frac{407a^{\frac{1}{2}}u^7}{2250c^3}$; &c., Ita ut ex datâ Areâ z, & ideo u, aut $\sqrt[3]{\frac{3z}{2a^{\frac{1}{2}}}}$, datur Abſciſſa x, & Ordinata $\dot{z}$. Hæc omnia poſſunt aptari Hyperbolæ, mutatis tantùm ſignis Quantitatis c in eis Terminis, in quibus ea aſcendit ad impares Dimenſiones.

PROBL. X.

Invenire quotlibet Curvas, quarum Longitudo, finitâ Æquatione poſſit exprimi.

Sequentes poſitiones viam aperiunt ad hujus Problematis Solutionem.

I.

TAB. VIII. Si (*Fig.* 50.) recta Linea DC concipiatur ita moveri, ut ſemper Perpendicularis ſit Curvæ AD, omnia ejus Puncta G; r; g; &c., deſcribent alias Curvas, ut GK; rs; gk; &c., quæ æquidiſtantes erunt & Perpendiculares illi Rectæ.

II. Si

I I.

Si hæc Recta utrinque in infinitum producatur, ejus extrema ad contrarias partes movebuntur; idcirco erit aliquod Punctum intermedium, omnis motûs expers, quod propterea vocari poterit Centrum motûs. Hoc Punctum erit Centrum ipſum Curvaturæ, quâ Curva A D gaudet ad Punctum D, & de quo ſupra locuti ſumus. Sit illud C.

I I I.

Si ſupponis, quòd Linea A D non eſt Circularis, ſed inæquabiliter curvata, ſit ea magis curvata *δ* verſùs, quàm verſùs Δ. Centrum illud aſſiduè locum mutabit, & propiùs accedet ad partes magis curvas, ut in K; ac recedet à partibus minùs Curvis, ut in *k*, & hoc pacto deſcribet aliquam Lineam ut K C *k*.

I V.

Recta Linea D C ſemper tanget Lineam à Curvaturæ Centro deſcriptam. Moveatur enim verſùs *δ* Punctum D in hac Rectâ ſumptum, alterum ejus Punctum G poſitum inter C, & D Puncta, eodem tempore accedit ad Punctum K, & movetur ad eaſdem partes, ac Punctum D per Poſit. I I. Rurſus, idem Punctum D moveatur verſùs Δ; tunc Punctum *g*, quod eodem tempore fertur verſùs K, & ſitum eſt ultra Punctum C, movetur ad contrarias partes, ac Punctum D, id eſt, ad eaſdem, ad quas ferebatur Punctum G in priori ſuppoſitione, dum accedebat ad K. Igitur Puncta K, & *k* jacent ad eaſdem partes Lineæ D C; ſed Puncta K & *k* indefinitè exprimunt omnia Puncta; ergo patet, quòd tota Curva jacet ad eandem partem Lineæ rectæ D C, & ideo ab eâ non ſecatur, ſed ſolùm tangitur.

Hic ſuppoſuimus Lineam *δ* D Δ eſſe ſemper magis curvatam verſùs *δ*, & minùs verſùs Δ; Nam, ſi ejus major, aut minor Curvatura eſſet in D, tunc recta Linea D C ſecaret Curvam C K, ſub

Angulo tamen, qui minor eſſet quocunque Angulo rectilineo, quod idem eſt ac ſi diceres, eam tangeret. Quinimo tunc Punctum C eſt Limes, aut Cuſpis, in quo duæ partes hujus Curvæ, quàm maximè poteſt, obliquè concurrentes, mutuò ſe ſe tangunt; & ideo meliùs dici poteſt hanc Curvam tangi, quàm ſecari à Rectâ D C, quæ dividit angulum Contactûs.

V.

Recta Linea CG æquat Curvam CK. Nam, intellige omnia Rectæ Puncta r; $2r$; $3r$; $4r$; &c. deſcribere Arcus Curvarum rs; $2r2s$; $3r3s$; $4r4s$; &c; dum accedunt ad Curvam CK motu Rectæ; & quia Arcus iſti (per Poſitionem I.) Perpendiculares ſunt Rectis, quæ tangunt Curvam CK (per Poſit. IV.) ideò Perpendiculares ſunt etiam ad hanc Curvam. Quapropter eæ partes Lineæ CK. quæ interceptæ ſunt his Arcubus, & quæ, ob infinitam earum exiguitatem, haberi poſſunt tanquam Rectæ, æquales ſunt intervallis eorumdem Arcuum; videlicet (per Poſit. I.) ſingulis partibus Rectæ CG; Et, æqualibus æqualia addendo, tota Linea CK æqualis eſt toti Lineæ CG.

Idem conficies conſiderando, quòd quævis pas Lineæ CG, dum movetur, ſemet ſucceſſivè applicat cuilibet parti Curvæ CK, & ideo eam metitur, ad amuſſim ut Peripheria rotæ, dum gyrando movetur ſuper Planum, metitur intervallum, quod jugiter deſcribitur à Puncto Contactûs.

Hinc liquet quòd Problema ſolvi poteſt, aſſumendo ad libitum aliquam Curvam A δ D Δ, & hinc determinando aliam Curvam KCk, TAB. VIII. in quâ ſemper ſit Centrum Curvaturæ Curvæ aſſumptæ. Igitur (*Fig.* 51.) demitte Perpendiculares DB, & CL, ſuper Rectâ AB poſitione datâ, & in AB ſume aliquod Punctum A, & dic AB $= x$; Et BD $= y$; & aſſume relationem quamcunque inter x, & y ad determinandam Curvam AD; deinde, per Probl. V, inveni Punctum C, per quod determinare poteris Curvam KC, & ejus Longitudinem CG.

Exem-

Digitized by Google

E x e m p l u m.

Sit (*Fig.* 51.) $ax = yy$ Æquatio ad Curvam, quæ ideo erit Parabola TAB.VIII. *Apolloniana*. Et, per Probl. V. reperies $AL = \frac{1}{2}a + 3x$; $CL = \frac{4y^3}{aa}$; & $DC = \overline{\frac{a+4x}{a}} \times \sqrt{\frac{1}{4}aa + ax}$. Quibus inventis Curva KC determinatur per AL, & LC; ac Longitudo ejus per DC. Nam, quia, pro arbitrio ſumpſimus Puncta K, & C ubi libuit in Curvâ KC, ſupponamus K eſſe Centrum Curvaturæ Parabolæ ad ejus Verticem; quocirca, ponendo AB, & BD, id eſt, x, & y, evaneſcere, aſſequemur $DC = \frac{1}{2}a$. Et hæc eſt Longitudo ipſius AK, vel DG, quâ ſubductâ ex indefinito valore DC, ſupereſt GC, aut $CK = \overline{\frac{a+4x}{a}} \times \sqrt{\frac{1}{4}aa + ax} - \frac{1}{2}a$.

Nunc, ſi cognoſcere vis quænam Curva ſit hæc, & quanta ejus Longitudo abſque relatione ad Parabolam; dic $KL = z$, & $LC = u$; & erit $z = AL - \frac{1}{2}a = 3x$, vel $\frac{1}{3}z = x$; ac $\frac{az}{3} = ax = yy$. Quapropter $4\sqrt{\frac{z^3}{27a}} = \frac{4y^3}{aa} = CL = u$, aut $\frac{16z^3}{27a} = uu$; quæ Æquatio oſtendit Curvam KC eſſe Parabolam ſecundi generis. Ejus Longitudo autem reperitur $\overline{\frac{3a+4z}{3a}} \times \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{3}az} - \frac{1}{2}a$, ſcribendo ſcilicet $\frac{1}{3}z$ pro x in valore ipſius CG.

Problema reſolvi etiam poteſt ſumendo Æquationem, quæ exprimat relationem quæ eſt inter AP, & PD, ſuppoſito P Puncto, quo Abſciſſa, & Perpendicularis ſe interſecant. Nam, vocatis $AP = x$, & $PD = y$; concipe CDP moveri per Spatium infinitè parvum, & venire, puta, in Cpd. Abſcinde ex CD, & Cd, partes $C\Delta$, & $C\delta$, ambas ejuſdem datæ Longitudinis, *Ex. gr.* $= 1$; & ad CL demitte Perpendiculares Δg; & $\delta\gamma$, quarum altera Δg, (quam dico $= z$,) ſecat Cd in f. Jam, completo Parallelo-

grammo $g\gamma\delta e$, & ponendo eſſe $\dot{x}$; $\dot{y}$; & $\dot{z}$ Fluxiones Quantitatum x; y; & z, ut priùs, erit $e\Delta : \Delta f :: \overline{e\Delta}|^2 : \overline{\Delta\delta}|^2 : \overline{gC}|^2 : \overline{C\Delta}|^2 :: \frac{\overline{Cg}|^2}{C\Delta} : \Delta C$. Et $\Delta f : Pp :: \Delta C : CP$. Ergo, *ex æquo*, $\Delta e : Pp :: \frac{\overline{Cg}|^2}{C\Delta} : CP$. Sed Pp eſt Momentum Abſciſſæ, quo accedente ea fit Ap; & Δe eſt eodem tempore genitum Momentum Perpendicularis Δg, quo recedente ea fit $\delta\gamma$: Quocirca Δe; & Pp ſunt ut Fluxiones Linearum Δg (z), & AP (x), id eſt, ut $\dot{z}$ & $\dot{x}$. Quamobrem $\dot{z} : \dot{x} :: \frac{\overline{Cg}|^2}{C\Delta} : CP$. Sed, quia eſt $\overline{Cg}|^2 = \overline{C\Delta}|^2 - \overline{\Delta g}|^2 = 1 - zz$, & $C\Delta = 1$, erit $CP = \frac{\dot{x} - zz\dot{x}}{\dot{z}}$. Præterea, quia licet aſſumere aliquam ex tribus Fluxionibus $\dot{x}$; $\dot{y}$; & $\dot{z}$, pro uniformi illâ, ad quam aliæ referuntur; ſit $\dot{x}$ Fluxio hæc, quæ Unitati æquivalet; erit igitur $CP = \frac{1 - zz}{\dot{z}}$.

Inſuper eſt $C\Delta$ (1) : Δg (z) :: $CP : PL$; & ΔC (1) : Cg ($\sqrt{1 - zz}$) :: $PC : CL$; quapropter $PL = \frac{z - z^3}{\dot{z}}$, & $CL = \frac{1 - zz}{\dot{z}} \times \sqrt{1 - zz}$. Denique, ductâ pq parallela Arcui infinitè exiguo Dd, aut perpendiculari ad DC, erit Pq Momentum ipſius DP, quo ſcilicet accedente ea fit dp eodem tempore, quo AP evadit Ap. Quocirca pP, & Pq ſunt ut Fluxiones ipſarum AP (x), & PD (y), id eſt, ut 1 ad $\dot{y}$. Igitur quia ob ſimilia Triangula Ppq, & $C\Delta g$, ſunt $C\Delta$, & Δg, vel 1, & z, in eâdem ratione, erit $\dot{y} = z$, Unde habes Problematis ſolutionem hanc.

Ex propoſitâ Æquatione, quæ exprimit relationem inter x; & y; inveſtiga relationem Fluxionum, $\dot{x}$, & $\dot{y}$ (per Probl. I.), & ponendo

nendo $\dot{x} = 1$ obtinebis valorem $\dot{y}$, cui æqualis eſt z. Deinde ſcribendo z pro y, ope ultimæ Æquationis require relationem Fluxionum $\dot{x}$; $\dot{y}$; & $\dot{z}$ (per Probl. I.), & rurſus ſubſtitue 1 pro $\dot{x}$, hinc aſſequeris valorem $\dot{z}$. Quibus inventis fac $\frac{1 - \dot{y}\dot{y}}{\dot{z}} = \text{CP}$; $z \times \text{CP} = \text{PL}$; & $\text{CP} \times \sqrt{1 - \dot{y}\dot{y}} = \text{CL}$; & C erit Punctum in Curvâ, cujus pars quæcunque CK æqualis eſt rectæ Lineæ CG, quæ eſt differentia Tangentium ad Angulos rectos inſiſtentium Curvæ D*d*, & actarum ex Punctis C, & K.

E X E M P L U M.

Sit $ax = yy$ Æquatio exponens relationem ipſarum AP, & PD; eritque (per Probl. I.) primò $a\dot{x} = 2y\dot{y}$, aut $a = 2yz$. Deinde $2y\dot{z} + 2z\dot{y} = 0$, aut $\frac{-zz}{y} = \dot{z}$. Unde conficitur $\text{CP} = \frac{1 - \dot{y}\dot{y}}{\dot{z}} = y - \frac{4y^3}{aa}$; $\text{PL} = z \times \text{CP} = \frac{1}{2}a - \frac{2yy}{a}$, & $\text{CL} = \frac{aa + 4yy}{2aa} \times \sqrt{4yy - aa}$. Et, ſubtrahendo ex CP & PL y & x, remanet $\text{CD} = -\frac{4y^3}{aa}$; & $\text{AL} = \frac{1}{2}a - \frac{3yy}{a}$. ſubtraho autem y, & x, quia, quando CP & PL habent valores affirmativos, cadunt ultra Punctum P verſus D & A, & minui debent ſublatis Quantitatibus affirmativis DP, & PA; Quando verò valores habent negativos, cadunt ad contrarias partes Puncti P, & augeri debent, quod pariter fit ablatis affirmativis Quantitatibus DP & PA.

Nunc excudenda eſt Longitudo Curvæ, in quâ eſt Punctum C, comprehenſa inter duo ejus Puncta K & C; ad quod obtinendum quærenda eſt Longitudo Tangentis ad Punctum K, & ſubducenda ex CD. *Ex. gr.*, ſi K eſſet Punctum, ubi Tangens terminatur, cùm $C\Delta$ & Δg, aut 1 & z invicem æquantur, quod ideo erit in ipſâ Abſciſſa AP; ſcribe 1 pro z in Æquatione $a = 2yz$, unde reperies,

ries $a = 2y$, vel $\frac{1}{2}a = y$. Quapropter pro y ſcribe $\frac{1}{2}a$ in valore ipſius CD, id eſt, in $-\frac{4y^3}{aa}$; & provenit $-\frac{1}{2}a$. Et hæc eſt Longitudo Tangentis ad Punctum K, aut ipſius DG; Quantitas autem, quâ ſuperior indefinitus valor CD ab hac differt, eſt $\frac{4y^3}{aa} - \frac{1}{2}a$, nempe GC, cui æqualis eſt Curvæ pars KC.

Jam, hoc pacto deteges quænam Curva ea ſit; Ex AL, (mutato priùs ejus ſigno, quò fiat affirmativa;) aufer AK, quæ erit $\frac{1}{4}a$, & reſtabit $KL = \frac{3yy}{a} - \frac{3}{4}a$; hanc dic $= t$, & in valore Lineæ CL, quam appello u, ſcribe $\frac{4at}{3}$ pro $4yy - aa$; hinc orietur $\frac{2t}{3a}\sqrt{\frac{4}{3}at} = u$, aut $\frac{16t^3}{27a} = uu$, quæ Æquatio pertinet ad Parabolam ſecundi generis, ut jam inveneramus.

Si quando relatio ipſarum t, & u concinnè Æquatione concludi nequit, ſufficiet inveniſſe Longitudines CP, & PL. Ut, ſi ad exponendam relationem inter AP, & PD aſſumeretur Æquatio $3aax + 3aay - y^3 = 0$. Hinc (per Probl. I.) habetur primò $aa + aaz - yyz = 0$; Deinde $aa\dot{z} - 2zy\dot{y} - yy\dot{z} = 0$, & propterea $z = \frac{aa}{yy - aa}$, & $\dot{z} = \frac{2zy\dot{y}}{aa - yy}$. Unde dantur $PC = \frac{1 - \ddot{yy}}{\dot{z}}$, & $PL = z \times PC$, quibus determinatur Punctum C, quod Curvam tangit; & Longitudo Curvæ duobus Punctis intercepta innoteſcit ex differentiâ duarum correſpondentium Tangentium DC, aut $CP - y$.

Ex. gr. ſi ponas $a = 1$, & ſumas (ad determinandum aliquod Punctum C in Curvâ) $y = 2$; P, aut x evadit $\frac{y^3 - 3aay}{3aa} = \frac{2}{3}$; $z = \frac{1}{3}$; $\dot{z} = -\frac{4}{9}$; $PC = -2$; & $PL = -\frac{2}{3}$. Jam, ſi aliud Punctum determinaturus, facias $y = 3$; erit $AP = 6$; z

$=$

$= \frac{1}{8}$; $\dot{z} = -\frac{3}{256}$; $PC = -84$, & $PL = -10\frac{1}{2}$. Quibus datis, aufer y ex PC, & ſupererit -4 in primâ Hypotheſi, & -87 in ſecundâ, quæ erunt duæ Longitudines duarum DC; harum verò differentia 83 eſt Longitudo Curvæ inter duo Puncta reperta C, & c.

Hæc intelligenda ſunt de Curvis, quæ inter duo Puncta C, & c, aut C, & K nullum habent ex illis Terminis, aut Limitibus, quos vocavimus Cuſpides. Nam, quando unus aut plures ex Terminis iſtis, ſunt inter hæc Puncta, (qui Termini reperiuntur determinatis maximis aut minimis PC, vel CD,) ſeorſum quærendæ ſunt Longitudines ſingularum partium Curvæ, quæ ſunt inter Terminos iſtos, & Puncta C, vel K, & deinde hæ Longitudines invicem addendæ.

Probl. XI.

Invenire quotlibet Curvas, quarum Longitudines comparari poſſint cum aliquâ Curvâ propoſitâ, aut cum ſuis Areis applicatis datæ Lineæ, & id per finitam Æquationem.

Problema ſolvitur involvendo Longitudinem, aut Aream Curvæ propoſitæ in Æquatione, quam aſſumpſimus in Problemate ſuperiore, ad definiendam relationem, quæ eſt inter AP, & PD. Sed, ut $\dot{z}$, & z hinc (per Probl. I.) eruere liceat, priùs detegenda eſt Fluxio Longitudinis, aut Areæ.

Fluxio autem Longitudinis invenitur eam ponendo æqualem Radici quadratæ, extractæ ex Aggregato Quadratorum ex Fluxionibus Abſciſſæ, & Ordinatæ. Nam, ſit (*Fig.* 52.) RN Ordinata ad rectos Angulos ſuper Abſciſſam MN, & ea moveatur ſuper MN; ſit autem QR Curva propoſita, ad quam terminatur RN. Jam, dic $MN = s$; $NR = t$; & $RQ = u$; ac Fluxiones earum $\dot{s}$; $\dot{t}$, & $\dot{u}$ reſpectivè. Intellige Rectam NR venire in locum nr priori infinitè propinquum, & demitte Rs ad rectos Angulos ſuper nr; Tunc erunt Rs; sr; & rR ſimul exorientia Momenta Linearum MN; NR; & RQ, quibus accedentibus illæ evadunt Mn; nr; & rQ. TAB. IX.

Digitized by Google

Hæc autem Momenta eandem inter ſe rationem habent, ac earumdem Linearum Fluxiones; & quia rectus eſt Angulus Rsr, erit $\sqrt{\overline{Rs}|^2 + \overline{sr}|^2} = Rr$; aut $\sqrt{\dot{s}\dot{s} + \dot{t}\dot{t}} = \dot{u}$.

Sed duabus Æquationibus opus eſt ad determinandas Fluxiones $\dot{s}$, & $\dot{t}$, quarum una definire debet Relationem, quæ eſt inter MN, & NR, aut inter s, ac t, & ex quâ deducenda eſt Relatio Fluxionum $\dot{s}$, & $\dot{t}$; altera verò determinare debet Relationem, exiſtentem inter MN, aut NR in datâ Figurâ, ac PA, aut x in quæſitâ; unde deducere liceat Relationem, quam Fluxio $\dot{s}$, aut $\dot{t}$ habet ad Fluxionem $\dot{x}$, aut 1.

Detectâ verò $\dot{u}$, Fluxiones $\dot{y}$, & $\dot{z}$ excudi debent ex tertiâ aſſumptâ Æquatione, quâ definiri poteſt Longitudo ipſius PD, aut y. Deinde ſumere debes $PC = \frac{1 - \dot{y}\dot{y}}{\dot{z}}$; $PL = \dot{y} \times PC$; ac $DC = CP - y$, ut in Problemate ſuperiore.

E X E M P L. I.

Sit $as - ss = tt$ Æquatio ad datam Curvam QR, quæ erit Circulus; exprimat $xx = as$ Relationem ipſarum AP & MN, ac $\frac{2}{3} u = y$ Relationem Longitudinis Curvæ datæ QR, & Rectæ PD. Per primam erit $a\dot{s} - 2s\dot{s} = 2t\dot{t}$, aut $\frac{a - 2s}{2t}\dot{s} = \dot{t}$; Quapropter $\frac{a\dot{s}}{2t} = \sqrt{\dot{s}\dot{s} + \dot{t}\dot{t}} = \dot{u}$. Per ſecundam eſt $2x = a\dot{s}$, & ideo $\frac{\dot{x}}{t} = \dot{u}$; & per tertiam $\frac{2}{3}\dot{u} = \dot{y}$; id eſt, $\frac{2x}{3t} = z$; & idcirco $\frac{2}{3t} - \frac{2x\dot{t}}{3tt} = \dot{z}$. Quibus inventis, accipere debes $PC = \frac{1 - \dot{y}\dot{y}}{\dot{z}}$; $PL = \dot{y} \times PC$; & $DC = CP - y$, aut $PC - \frac{2}{3} QR$. Unde conſtat, quòd Longitudo datæ Curvæ QR nequit inveniri, niſi priùs detur Longitudo Rectæ DC, & hinc Longitudo Curvæ, ad quam pertinet Punctum C, & vice versâ.

EXEMPL.

Digitized by Google

EXEMPL. II.

Stante Æquatione $as - ss = tt$, pone $x = s$, & $uu - 4ax = 4ay$. Ex primâ erues $+ \frac{a\dot{s}}{2t} = \dot{u}$, ut ſupra. At è ſecundâ $1 = \dot{s}$, & ideo $\frac{a}{2t} = \dot{u}$. Ex tertiâ verò $2u\dot{u} - 4a = 4a\dot{y}$, aut (eliminando $\dot{u}$) $\frac{u}{4t} - 1 = z$. Quapropter $\frac{\dot{u}}{4t} - \frac{u\dot{t}}{4tt} = \dot{z}$.

EXEMPL. III.

Proponantur hæ tres Æquationes $aa = st$; $a + 3s = x$; & $x + u = y$. Prima, quæ pertinet ad Hyperbolam, dat $o = t\dot{s} + s\dot{t}$ aut $-\frac{t\dot{s}}{s} = \dot{t}$; igitur $\frac{\dot{s}}{s}\sqrt{ss + tt} = \sqrt{\dot{s}\dot{s} + \dot{t}\dot{t}} = \dot{u}$; ſecunda præbet $3\dot{s} = 1$, & ideo $\frac{1}{3s}\sqrt{ss + tt} = \dot{u}$; Tertia denique $1 + \dot{u} = \dot{y}$ aut $1 + \frac{1}{3s}\sqrt{ss + tt} = z$; quapropter $\dot{w} = \dot{z}$, ponendo ſcilicet $\dot{w}$ pro Fluxione Radicalis $\frac{1}{3s}\sqrt{ss + tt}$, quam ſi facias $= w$, aut $\frac{1}{9} + \frac{tt}{9ss} = ww$ invenies $\frac{2t\dot{t}}{9ss} - \frac{2tt\dot{s}}{9s^3} = 2w\dot{w}$; Et primùm ſubſtituendo $-\frac{t\dot{s}}{s}$ pro $\dot{t}$, deinde $\frac{1}{3}$ pro $\dot{s}$ & dividendo per $2w$, orietur $\frac{-2tt}{27ws^3} = \dot{w} = \dot{z}$. Nunc, inventis $\dot{y}$, & $\dot{z}$, cetera perficientur ut in primo Exemplo.

Jam, ſi ex quocunque Curvæ Puncto Q demittatur ſuper MN perpendicularis QV, & poſtuletur Curva, cujus Longitudo noſci poſſit ex Areâ QRNV applicatâ ad datam Lineam, hæc data Linea dicatur E, & Longitudo $\frac{QRNV}{E}$, quæ prodit ex hac applicatione, vocetur u, ac Fluxio ejus $\dot{u}$; Quia Fluxio Areæ QRNV eſt ad Fluxionem Areæ Parallelogrammi rectanguli conſtituti ſuper VN,

& cujus altitudo eſt E, ut Ordinata, aut mobilis Linea NR $= t$, quâ deſcribitur Area Curvilinea, eſt ad mobilem Lineam E, quâ eodem tempore deſcribitur Rectangulum; & Fluxiones $\dot{u}$, & $\dot{s}$ Linearum u, & MN, (aut s,) aut Longitudines, quæ exſurgunt applicando has Areas ad datam Lineam E, ſunt in eâdem ratione, erit $\dot{u} = \frac{t\dot{s}}{E}$. Quocirca quærendus eſt per hanc Regulam valor ipſius $\dot{u}$, & cetera conficienda, ut in præcedentibus Exemplis.

Exempl. IV.

Sit QR Hyperbola, quæ definitur Æquatione $aa + \frac{ass}{c} = tt$; hinc prodit (per Probl. I.) $\frac{as\dot{s}}{c} = t\dot{t}$, vel $\frac{as\dot{s}}{ct} = \dot{t}$; ſi jam aſſumas duas alias Æquationes $x = s$, & $y = u$; ex primâ aſſequeris $\dot{x} = \dot{s}$, unde $\dot{u} = \frac{t\dot{s}}{E} = \frac{t}{E}$, ultima verò præbebit $\dot{u} = \dot{y}$ aut $z = \frac{t}{E}$, quapropter $\dot{z} = \frac{\dot{t}}{E}$, & ſubſtituendo $\frac{as\dot{s}}{ct}$ aut $\frac{as}{ct}$ pro $\dot{t}$, reperies $\frac{as}{Ect} = \dot{z}$. Nunc inventis $\dot{y}$, & $\dot{z}$, fac $\frac{1 - \dot{y}\dot{y}}{\dot{z}} = CP$, & $\dot{y} \times CP = PL$, ut priùs, & ſic determinabitur Punctum C, & Curva, in quâ eſt Punctum illud. Hujus autem Curvæ Longitudo innoteſcet ex Longitudine DC, quæ æquivalet ipſi $CP - u$, ut jam ſatis demonſtravimus.

Sed, & alia Methodus adeſt hujus Problematis reſolvendi, & hæc in eo tota verſatur, ut inveniantur Curvæ, quarum Fluxiones ſint aut æquales Fluxionibus Curvæ propoſitæ, aut compoſitæ ex hujus, & alterius Lineæ Fluxionibus. Hæc Methodus aliquando utilis eſt, cùm Curvæ mechanicæ transformandæ ſunt in æquales geometricas Curvas, cujus rei præclarum Exemplum habemus in Lineis Spiralibus.

Sit

Sit enim (*Fig*. 53.) A B Recta poſitione data; DB Arcus, qui moveatur ſuper A B, tanquam Abſciſſa, & cujus Centrum ſemper ſit A; A D *d* Spiralis, quâ Arcus iſti ſemper terminantur; *b d* Arcus infinitè priori proximus, aut Locus, in quem venit hic Arcus exiguo motu; D C perpendiculariter inſiſtat Arcui *b d*; & *d* G ſit illorum Arcuum differentia; A H alia Curva æqualis Spirali A D; BH Recta, quæ ad rectos Angulos movetur ſuper A B, & quæ finitur Curvâ A H; *bh* Locus quamproximus, in quem Linea pervenit motu ſuo, & H K perpendicularis ad *b h*. Jam, in infinitè exiguis Triangulis D C *d*, H K *h*, quia D C, & H K æquales ſunt eidem tertiæ Lineæ B *b*, & idcirco mutuò æquales, & D *d* ac H *h* (per Hypotheſim) ſunt correſpondentes æqualium Curvarum partes, & ideo æquales, ac recti ſunt Anguli ad C & K; æqualia pariter erunt reliqua latera C *d*, & K *h*; Præterea, quia A B : B D :: A *b* : *b* C : *b* A — A B (B *b*) : *b c* — B D (C G), idcirco $\frac{BD \times Bb}{AB}$ = C G; Hoc dempto ex *d* G remanet $dG - \frac{DB \times Bb}{AB} = dC = hK$. Dic igitur $AB = z$; $BD = u$; & $BH = y$, earúmque Fluxiones $\dot{z}$; $\dot{u}$; & $\dot{y}$ reſpectivè; Cùm B *b*, *d* G, & *h* K ſint unà genita earundem Momenta, quibus accedentibus eæ Lineæ evadunt A *b*; *b* D; & *b b*, ea Momenta ſunt inter ſe, ut Fluxiones. Igitur in ultimâ Æquatione pro Momentis ponantur Fluxiones, & ſymbola pro Lineis, ac habebitur $\dot{u} - \frac{u\dot{z}}{z} = \dot{y}$. Nunc ſi $\dot{z}$ ponatur æquabilis, aut Unitas, ad quam ceteræ Fluxiones referuntur, Æquatio erit $\dot{u} - \frac{u}{z} = \dot{y}$. TAB. IX.

Quapropter, ſi Relatio quæ exiſtit inter A B, & B D, (aut inter z, & u,) exponatur Æquatione aliquâ Spiralem determinante, dabitur Fluxio $\dot{u}$ (per Probl. I.) & ideo etiam Fluxio $\dot{y}$, eam ponendo æqualem $\dot{u} - \frac{u}{z}$. Et (per Probl. II.) dabitur Linea y, aut B H, cujus illa eſt Fluxio.

Exempl. I.

Si detur Æquatio $\frac{zz}{a} = u$, quæ eſt ad Spiralem Archimedis, erit (per Probl. I.) $\frac{2z}{a} = \dot{u}$; hinc aufer $\frac{u}{z}$, aut $\frac{z}{a}$, reſtabit $\frac{z}{a} = \dot{y}$; igitur (per Probl. II.) $\frac{zz}{2a} = y$. Quæ Æquatio monſtrat Curvam AH, cui æqualis eſt Spiralis AD, eſſe Parabolam *Apollonianam*, cujus Latus rectum eſt $2a$, & Ordinata BH æqualis ſemiſſi Arcûs BD.

Exempl. II.

Si proponeretur Spiralis definita per Æquationem $z^3 = auu$; aut $u = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$. hinc aſſequeremur (per Probl. I.) $\dot{u} = \frac{3z^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}}$, unde ſubtrahe $\frac{u}{z}$, aut $\frac{z^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$ reſtat $\frac{z^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} = \dot{y}$; hinc autem conficiemus (per Probl. II.) $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}} = y$. Id eſt, $\frac{1}{3}$ BD $=$ BH, & AB erit Parabola ſecundi generis.

Exempl. III.

Si Æquatio ad Spiralem eſſet $z\sqrt{\frac{a+z}{c}} = u$; haberemus (per Probl. I.) $\frac{2a+3z}{2\sqrt{ac+cz}} = \dot{u}$; unde ſi demis $\frac{u}{z}$ aut $\sqrt{\frac{a+z}{c}}$, ſuperſtitem invenies $\frac{z}{2\sqrt{ac+cz}} = \dot{y}$. Jam, quia Quantitas genita Fluxione $\dot{y}$ nequit reperiri per Probl. II., niſi ea reſolvatur in Seriem infinitam, juxta Scholium Problematis IX, eam reduco ad Formam Æquationum,

num, quæ ſunt in primâ Tabularum Columnâ, ſubſtituendo z^{η} pro z; quo facto Æquatio ſuperior evadit $\frac{z^{2\eta-1}}{2\sqrt{ac+cz^{\eta}}}=\dot{y}$, quæ eſt ſecundæ Speciei, quarti Ordinis Tabulæ I, Et comparatis Terminis, eſt $d=\frac{1}{2}$; $e=ac$; & $f=c$; itaque $\overline{\frac{z-2a}{3c}}\times\sqrt{ac+cz}$ $=t=y$; quæ Æquatio pertinet ad Curvam geometricam AH Longitudine æqualem Spirali AD.

PROBL. XII.

Determinare Curvarum Longitudinem.

In præcedenti Problemate demonſtravimus Fluxionem curvæ Lineæ, æqualem eſſe Radici quadratæ extractæ ex Aggregato Quadratorum Fluxionum Abſciſſæ, & Ordinatæ perpendicularis. Accipe igitur Fluxionem Abſciſſæ pro uniformi & determinatâ menſurâ, aut pro Unitate, ad quam reliquæ Fluxiones referuntur; deinde, ex Æquatione Curvam definiente, erue Fluxionem Ordinatæ, & habebis Fluxionem Curvæ, ex quâ (per Probl. II.) deducere poteris ejus Longitudinem.

EXEMPL. I.

Proponatur (*Fig.* 54.) Curva FDH, quæ definitur Æquatione TAB. IX. $\frac{z^3}{aa}+\frac{aa}{12z}=y$; dictis ſcilicet Abſciſſâ AB $=z$, & Ordinatâ mobili BD $=y$. Jam; ex Æquatione iſtâ deduces (per Probl. I.) $\frac{3zz}{aa}-\frac{aa}{12zz}=\dot{y}$ (ponendo Unitatem pro Fluxione ipſius z, & $\dot{y}$ pro Fluxione y). Harum Fluxionum Quadrata in unum conjice, inventurus $\frac{9z^4}{a^4}+\frac{1}{2}+\frac{a^4}{144z^4}=\dot{t}\dot{t}$, & , extracta Radice,

$\frac{3zz}{aa}$

$\frac{3zz}{aa} + \frac{aa}{12zzz} = \dot{t}$; Et hinc (per Probl. II.) $\frac{z^3}{aa} - \frac{aa}{12z} = t$. Ubi $\dot{t}$ repræſentat Curvæ Fluxionem, & t ejus Longitudinem.

Quamobrem, ſi petitur Longitudo alicujus partis dD hujus Curvæ, ex Punctis d, & D demitte perpendiculares db & DB, ſuper AB, & pone in valore ipſius t Quantitates Ab & AB ſeorſum, pro z; eritque differentia Quantitatum hinc prodeuntium Longitudo quæſita dD. *Ex. gr.* ſit A$b = \frac{1}{2}a$, & AB $= a$, ſcribe $\frac{1}{2}a$ pro z, & invenies $t = -\frac{a}{24}$; Deinde rurſus ſcribe a pro z, & obtinebis $t = \frac{11a}{12}$, ex hoc valore primum deme, reſtabit $\frac{23a}{24}$, quæ erit Longitudo ipſius dD. Si verò tantùm Ab determinata eſſet, & fieret $= \frac{1}{2}a$, & haberetur AB pro indefinitâ, reſtaret $\frac{z^3}{aa} - \frac{aa}{12z} + \frac{a}{24}$ pro valore dD.

Si noſcere cupis partem Curvæ repræſentatam per t, ſuppone valorem ipſius t nihilo æqualem; unde obtinebis $z^4 = \frac{a^4}{12}$, aut $z = \frac{a}{\sqrt[4]{12}}$. Igitur, ſume A$b = \frac{a}{\sqrt[4]{12}}$, & erige perpendicularem bd, Longitudo Arcûs dD erit t aut $\frac{z^3}{aa} - \frac{aa}{12z}$. Idem dictum volo de aliis Curvis.

Nec diverſa via ineunda eſſet, ſi proponeretur Curva, cujus Æquatio foret $\frac{z^4}{a^3} + \frac{a^3}{32zz} = y$; hinc enim deduceretur $\frac{z^4}{a^3} - \frac{a^3}{32zz} = t$; neque ſi daretur Æquatio $\frac{z^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}} z^{\frac{1}{2}} = y$; ex quâ fieret $\frac{z^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3}a^{\frac{3}{2}} z^{\frac{1}{2}} = t$. Neque demum ſi proponeretur Æquatio

tio generalis $cz^{\theta} + \frac{z^{2-\theta}}{4\theta\theta c - 8\theta c} = y$, in quâ θ adhibetur ad indicandum quemvis numerum ſive integrum, ſive fractum. Hæc autem Æquatio præbet $cz^{\theta} - \frac{z^{2-\theta}}{4\theta\theta c - 8\theta c} = t$.

Exempl. II.

Proponatur Curva definita hac Æquatione $\overline{\frac{2aa + 2zz}{3aa}} \times \sqrt{aa + zz} = y$; Erit (per Probl. I.) $\dot{y} = \frac{4a^4 z + 8aaz^3 + 4z^5}{3a^4 y}$, aut (exterminato y) $\dot{y} = \frac{2z}{aa}\sqrt{aa + zz}$. Hujus Quadratum adde Unitati, & obtinebis $1 + \frac{4zz}{aa} + \frac{4z^4}{a^4}$, & erit ejus Radix $1 + \frac{2zz}{aa} = \dot{t}$. Hinc autem (per Probl. II.) erues $z + \frac{2z^3}{3aa} = t$.

Exempl. III.

Proponatur Parabola ſecundi generis, cujus Æquatio eſt $z^3 = ayy$, aut $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = y$; hæc (per Probl. I.) dat $\frac{3z^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} = \dot{y}$. Igitur, $\sqrt{1 + \frac{9z}{4a}} = \sqrt{1 + \dot{y}\dot{y}} = \dot{t}$. Sed quia Longitudo Curvæ genita Fluxione $\dot{t}$, nequit inveniri per Probl. II. abſque Reductione ad infinitam Seriem Terminorum ſimplicium, conſulo Tabulas Probl. IX., & juxta Scholium ad illud pertinens, invenio $t = \frac{\overline{8a + 18z} \times \sqrt{1 + \frac{9z}{4a}}}{27}$.

Et eâdem ratione poteris invenire Longitudinem Parabolarum expreſſarum Æquationibus $z^5 = ay^4$; $z^7 = ay^6$; $z^9 = ay^8$; &c.

EXEMPL. IV.

Proponatur Parabola, cujus Æquatio eſt $z^4 = a y^3$; aut $\frac{z^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = y$. hinc (per Probl. I.) orietur $\frac{4z^{\frac{1}{3}}}{3a^{\frac{1}{3}}} = \dot{y}$. Igitur $\sqrt{1 + \frac{16 z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}} = \sqrt{1 + \dot{y}\dot{y}} = \dot{t}$. His inventis, conſulo Tabulas, ſecundùm ſupradictum Scholium, & hos Terminos comparando cum Terminis ſecundi Theorematis quinti ordinis Tabulæ II, habeo $z^{\frac{1}{3}} = x$; $\sqrt{1 + \frac{16xx}{9a^{\frac{2}{3}}}} = u$; & $\frac{3}{2}s = t$. Ubi x quidem denotat Hyperbolæ Abſciſſam, y Ordinatam, s verò Aream, & t Longitudinem, quæ prodit Aream $\frac{3}{2}s$ applicando Unitati lineari.

Eodem Pacto Longitudines Parabolarum $z^6 = ay^5$; $z^8 = ay^7$; $z^{10} = ay^9$; &c. revocari poſſunt ad Aream Hyperbolæ.

EXEMPL. V.

TAB.IX. Proponatur (*Fig.* 55.) Ciſſoïs Veterum, cujus Æquatio eſt $\frac{aa - 2az + zz}{\sqrt{az - zz}} = y$; hinc fit (per Probl. I.) $-\frac{a - 2z}{2zz} \times \sqrt{az - zz} = \dot{y}$; & idcirco $\frac{a}{2z}\sqrt{\frac{a + 3z}{z}} = \sqrt{1 + \dot{y}\dot{y}} = \dot{t}$; quæ, ſcribendo z^{η} pro $\frac{1}{z}$, aut z^{-1}, evadit $\frac{a}{2z}\sqrt{az^{\eta} + 3} = \dot{t}$, Æquatio primæ Speciei tertii Ordinis Tabulæ II; Jam, per Terminorum comparationem, invenio $\frac{a}{2} = d$; $3 = e$; & $a = f$; itaque $z = \frac{1}{z^{\eta}} = xx$; $\sqrt{a + 3xx} = u$, & $6s - \frac{2u^3}{x} = \frac{4de}{\eta f} \times \frac{u^3}{2ex} - s = t$. Hæc autem Æquatio, accipiendo a pro Unitate,

tate, per quam multiplicatæ aut diviſæ hæ Quantites revocari poſſunt ad juſtum Dimenſionum numerum, evadit $az = xx$; $\sqrt{aa+3xx} = u$; & $\frac{6s}{a} - \frac{2u^3}{ax} = t$; quæ ſic conſtrui poteſt.

Sit DV Ciſſois; VA Diameter Circuli, ad quem illa pertinet; AF Ciſſoidis Aſymptotus; & DB perpendicularis ad AV, & Curvæ occurrens in D. Semiaxe FA = AV, & Semiparametro GA $= \frac{1}{3}$ AV deſcribe Hyperbolam F*k*K; deinde ſume AC mediam proportionalem inter BA, & AV; per C, & V age C*k*, & VK perpendiculares ipſi AV, & occurrentes Hyperbolæ in *k* & K, quam in his Punctis tangant Rectæ *kt*, & KT occurrentes VA in *t* & T; & AV applicetur Rectangulum AVNM æquale ſpatio TK*kt*. Longitudinem Ciſſoidis dico ſextuplam Altitudinis VN.

Exempl. VI.

Sit (*Fig.* 39.) A*d* Ellipſis, cujus Æquatio $\sqrt{az-2zz} = y$, & proponatur Curva mechanica AD ejus naturæ, ut ſi producatur B*d*, aut *y* donec ea Curvæ occurrat in D, ſit BD æqualis Arcui A*d* Ellipſeos. Nunc, ut hujus Longitudo determinetur; Æquatio $\sqrt{az-2zz} = y$ dabit $\frac{a-4z}{2\sqrt{az-2zz}} = \dot{y}$, cujus Quadrato addens Unitatem, conſequeris $\frac{aa-4az+8zz}{4az-8zz}$, Quadratum Fluxionis Arcûs A*d*. Huic rurſus adde Unitatem, unde fiet $\frac{aa}{4az-8zz}$, cujus Radix quadrata $\frac{a}{2\sqrt{az-2zz}}$ eſt Fluxio Curvæ AD. Ubi ſi *z* extrahatur extra ſignum radicale, & pro z^{-1} ſcribatur z^{η}, ea fiet $\frac{a}{2z\sqrt{az^{\eta}-2}}$, Fluxio primæ Speciei quarti Ordinis Tabulæ II. Hinc, Terminis collatis, deteges $d = \frac{1}{2}a$; $e = -2$; & TAB. VI.

 $f = a$

$f = a$, quapropter $z = \frac{1}{z^{\eta}} = x$; $\sqrt{ax - 2xx} = u$; & $\frac{8s}{a} - \frac{4ux}{a} + u = \overline{\frac{8de}{\eta ff}} \times \overline{s - \frac{1}{2} ux - \frac{fu}{4e}} = t.$

En hujus Conſtructionem; Age dC (poſito C Ellipſeos Centro;) ſuper A C conſtitue Parallelogrammum æquale Sectori ACd; hujus dupla Altitudo æquabit Longitudinem Curvæ A D.

Exempl. VII.

TAB. IX. Sint (*Fig.* 56.) $A\beta = \phi$ (N°. 1.), & $\alpha\delta$ Hyperbola, cujus Æquatio $\sqrt{-a + b\phi\phi} = \beta\delta$, & Tangens $T\delta$: Jam proponatur Curva VdD, cujus Abſciſſa AB ſit $\frac{1}{\phi\phi}$, & cujus Ordinata perpendicularis BD, Longitudo, quæ oritur ex applicatione Areæ $\alpha\delta T\alpha$, ad Unitatem Linearem. Nunc determinaturus Longitudinem hujus Curvæ V D, quæro Fluxionem Areæ $\alpha\delta T\alpha$ poſitâ uniformi Fluxione ipſius A B, eámque reperio $\frac{a}{4bz}\sqrt{b - az}$, (vocando ſcilicet $AB = z$, & ejus Fluxionem $= 1$,). Eſt enim $AT = \frac{a}{b\phi} = \frac{a}{b}\sqrt{z}$ cujus Fluxio eſt $\frac{a}{2b\sqrt{z}}$. Hujus autem ſemiſſis ductus in Altitudinem $\beta\delta$, aut $\sqrt{-a + \frac{b}{z}}$ eſt Fluxio Areæ $\alpha\delta T$ deſcriptæ à Tangente δT. Quapropter hæc Fluxio eſt $\frac{a}{4bz}\sqrt{b - az}$, quæ applicata Unitati fit Fluxio Ordinatæ BD. Hujus Quadratum $\frac{aab - a^3z}{16bbzz}$ adde Unitati Quadrato Fluxionis ipſius BD, & exſurget $\frac{aab - a^3z + 16bbzz}{16bbzz}$, cujus Radix $\frac{1}{4bz}\sqrt{aab - a^3z + 16bbzz}$ eſt Fluxio Curvæ VD: Sed hæc eſt Fluxio primæ Speciei ſeptimi Ordinis Tabulæ II: Confer Terminos, & invenies $\frac{1}{4b} = d$; aab $=$:

Fig. 43.

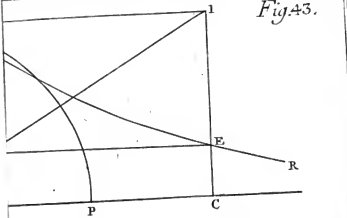


Fig. 44.

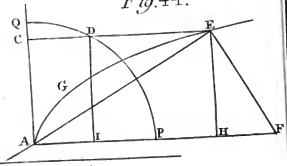
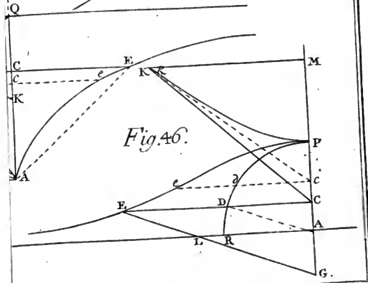


Fig. 46.



Digitized by Google

$= e$; $- a^3 = f$; $16bb = g$ & idcirco $z = x$; & $\sqrt{aab - a^3x + 16bbxx} = u$, (Æquatio ad Sectionem conicam, puta HG (N°. 2.), cujus Area EFGH eſt s & ubi $EF = x$; ac $FG = u$;) pariter $\frac{1}{z} = \xi$; & $\sqrt{16bb - a^3\xi + ab\xi\xi} = \gamma$ (Æquatio ad aliam Sectionem conicam, puta ML (N°. 3.), cujus Area IKLM eſt σ, & ubi $IK = \xi$; & $KL = \gamma$) Demum $t = \frac{2aabb\xi\gamma - a^3b\gamma - a^4u - 4aabb\sigma - 32abbs}{64b^4 - a^4}$.

Quapropter, ut innoteſcat aliqua Curvæ VD pars Dd, demitte db perpendicularem ad AB, & fac $Ab = z$; deinde per nuper inventa quære valorem ipſius t. Jam fac $AB = z$, & hinc rurſus erue t. Tunc Longitudo quæſita Dd exponetur per differentiam horum duorum valorum ipſius t.

EXEMPL. VIII.

Proponatur Hyperbola, cujus Æquatio ſit $\sqrt{aa + bzz} = y$; Hinc (per Probl. I.) habebis $\dot{y} = \frac{bz}{y}$, aut $\frac{bz}{\sqrt{aa + bzz}}$. Cujus Quadratum adde Unitati; hujus autem Summæ Radix erit $\sqrt{\frac{aa + bzz + bbzz}{aa + bzz}} = \dot{t}$. Nunc, quia Fluxio hæc abeſt è Tabulis, eam redigo in Seriem infinitam, & primò, per Diviſionem, fit $\dot{t} = \sqrt{1 + \frac{bb}{aa}zz - \frac{b^3}{a^4}z^4 + \frac{b^4}{a^6}z^6 - \frac{b^5}{a^8}z^8}$; &c. deinde, per Extractionem Radicis, $\dot{t} = 1 + \frac{bb}{2aa}zz - \frac{4b^3 + b^4}{8a^4}z^4 + \frac{8b^4 + 4b^5 + b^6}{16a^6}z^6$; &c. Unde (per Probl. II.) invenietur Arcus hyperbolicus, aut $t = z + \frac{bb}{6aa}z^3 - \frac{4b^3 + b^4}{40a^4}z^5 + \frac{8b^4 + 4b^5 + b^6}{112a^6}z^7$; &c.

Si proponeretur Ellipſis $\sqrt{aa - bzz} = y$, ubique mutanda forent ſigna ipſius b; unde conficeretur $z + \frac{bb}{6aa}z^3 + \frac{4b^3 - b^4}{40a^4}z^5 + \frac{8b^4 - 4b^5 + b^6}{112a^6}z^7$; &c., pro Longitudine ejus Arcûs. Similiter, ponendo Unitatem pro b, erit $z + \frac{z^3}{6aa} + \frac{3z^5}{40a^4} + \frac{5z^7}{112a^6}$; &c. Longitudo Arcûs Circularis. Numerales autem Coefficientes hujus Seriei poſſunt inveniri in infinitum, continuâ Multiplicatione Terminorum hujus Progreſſionis $\frac{1\times 1}{2\times 3}$; $\frac{3\times 3}{4\times 5}$; $\frac{5\times 5}{6\times 7}$; $\frac{7\times 7}{8\times 9}$; $\frac{9\times 9}{10\times 11}$; &c.

EXEMPL. IX.

TAB. IX. Denique proponatur (*Fig.* 57.) Quadratrix VDE, cujus Vertex eſt V, A Centrum, & AV Semidiameter Circuli interioris, cui ea aptatur, & rectus ſit Angulus VAE. Jam, per A ducatur quævis Recta AKD occurrens Circulo in K, & Quadratrici in D, & ſuper AE demittantur KG, DB ad rectos Angulos; dic KV $= x$; VA $= a$; AG $= z$, & BD $= y$; & erit, ut in ſuperiore Exemplo, $x = z + \frac{z^3}{6aa} + \frac{3z^5}{40a^4} + \frac{5z^7}{112a^6}$; &c. Extrahe Radicem z, unde prodibit $z = x - \frac{x^3}{6aa} + \frac{x^5}{120a^4} - \frac{x^7}{5040a^6}$; &c. cujus Quadratum ſubduc ex AKq, aut aa; & reliqui Radix $a - \frac{xx}{2a} + \frac{x^4}{24a^3} - \frac{x^6}{720a^5}$; &c. erit GK. Nunc, quia ob Quadratricis naturam eſt AB $=$ VR $= x$, & eſt AG : GK :: AB : BD (y), divide AB $\times$ GK per AG, quo pacto habebis $y = a - \frac{xx}{3a}$

Digitized by Google

Fig. 47.

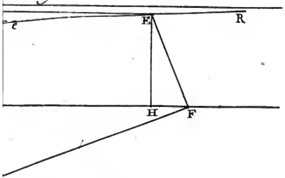


Fig. 48.

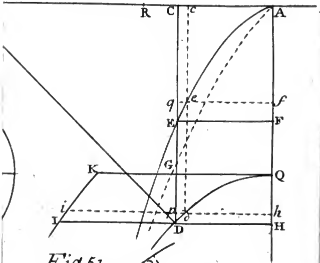
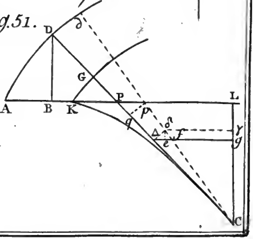


Fig. 51.



Digitized by Google

Digitized by Google

$- \frac{x^4}{45a^3} - \frac{2x^6}{945a^5}$; &c. Ergo (per Probl. I.) $\dot{y} = -\frac{2x}{3a} - \frac{4x^3}{45a^3} - \frac{4x^5}{315a^5}$; &c., cujus Quadrato adjice Unitatem, & quære Summæ Radicem, futuram $1 + \frac{2xx}{9aa} + \frac{14x^4}{405a^4} + \frac{604x^6}{127575a^6}$; &c. $= t$. Unde (per Probl. II.) poteſt obtineri Arcus Quadratricis, videlicet

$$VD = x + \frac{2x^3}{27aa} + \frac{14x^5}{2825a^4} + \frac{604x^7}{893025a^6};\ \&c.\ \&c.\ \&c.$$

Digitized by Google

OPUSCU-

Digitized by Google

Fig. 53.

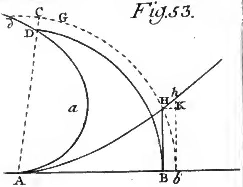
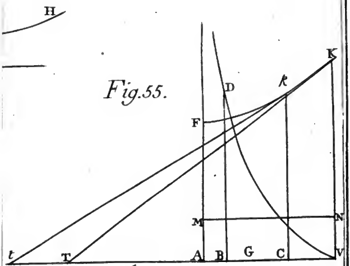




Fig. 55.



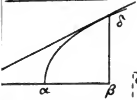
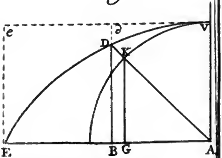
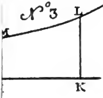


Fig. 57.





Digitized by Google

OPUSCULUM III.

ISAACI

NEWTONI

TRACTATUS

DE

QUADRATURA CURVARUM.

Editus LONDINI 1706.

Digitized by Google

Digitized by Google

ISAACI NEWTONI TRACTATUS DE QUADRATURA CURVARUM.

INTRODUCTIO.

QUANTITATES Mathematicas, non ut ex partibus quàm minimis conſtantes, ſed ut motu continuo deſcriptas hìc conſidero. Lineæ deſcribuntur ac deſcribendo generantur non per appoſitionem partium, ſed per motum continuum Punctorum; Superficies per motum Linearum; Solida per motum Superficierum; Anguli per rotationem Laterum; Tempora per fluxum continuum, & ſic in ceteris. Hæ Geneſes in rerum naturâ locum verè

Digitized by Google

habent, & in Motu Corporum quotidie cernuntur. Et ad hunc modum Veteres ducendo Rectas mobiles in longitudinem Rectarum immobilium Geneſim docuerunt Rectangulorum.

Conſiderando igitur, quòd Quantitates æqualibus Temporibus creſcentes & creſcendo genitæ, pro Velocitate majori vel minori quâ creſcunt ac generantur, evadunt majores vel minores, Methodum quærebam determinandi Quantitates ex Velocitatibus Motuum vel Incrementorum, quibus generantur; & has Motuum vel Incrementorum Velocitates nominando *Fluxiones*, & Quantitates genitas nominando *Fluentes*, incidi paulatim *annis* 1665, & 1666 in Methodum Fluxionum, quâ hic uſus ſum in Quadraturâ Curvarum.

Fluxiones ſunt quàm proximè ut Fluentium Augmenta æqualibus Temporis particulis quàm minimis genita, &, ut accuratè loquar, ſunt in primâ Ratione Augmentorum naſcentium; exponi autem poſſunt per Lineas quaſcunque, quæ ſunt ipſis proportionales.

TAB. I. Ut ſi (*Fig.* 1.) Areæ *ABC*, *ABDG* Ordinatis *BC*, *BD* ſuper Baſi *AB* uniformi cum Motu progredientibus deſcribantur, harum Arearum Fluxiones erunt inter ſe ut Ordinatæ deſcribentes *BC* & *BD*, & per Ordinatas illas exponi poſſunt; propterea quòd Ordinatæ illæ ſunt ut Arearum Augmenta naſcentia.

Progrediatur Ordinata *BC* de loco ſuo *BC* in locum quemvis novum *bc*.

Compleatur Parallelogrammum *BCEb*, ac ducatur Recta *VTH*, quæ Curvam tangat in *C*, ipſiſque *bc* & *BA* productis occurrat in *T* & *V*: & Abſciſſæ *AB*, Ordinatæ *BC*, & Lineæ curvæ *ACc* Augmenta modò genita erunt *Bb*, *Ec* & *Cc*; & in horum Augmentorum naſcentium Ratione primâ ſunt Latera Trianguli *CET*, ideòque Fluxiones ipſarum *AB*, *BC*, & *AC* ſunt ut Trianguli illius *CET* Latera *CE*, *ET*, & *TC*, & per eadem Latera exponi poſſunt, vel, quod perinde eſt, per Latera Trianguli conſimilis *VBC*.

Eodem recidit, ſi ſumantur Fluxiones in ultimâ Ratione partium evaneſcentium. Agatur Recta *Cc*, & producatur eadem ad *K*. Redeat Ordinata *bc* in locum ſuum priorem *BC*, &, coeuntibus

Punctis

Punctis C & c, Recta CK coincidet cum Tangente CH, & Triangulum evaneſcens CEc in ultimâ ſuâ formâ evadet ſimile Triangulo CET, & ejus Latera evaneſcentia CE, Ec, & Cc erunt ultimò inter ſe, ut ſunt Trianguli alterius CET Latera CE, ET, & TC; & propterea in hac Ratione ſunt Fluxiones Linearum AB, BC & CA. Si Puncta C & c parvo quovis intervallo à ſe invicem diſtant, Recta CK parvo intervallo à Tangente CH diſtabit. Ut Recta CK cum Tangente CH coincidat, & Rationes ultimæ Linearum CE, Ec, & cC inveniantur, debent Puncta C & c coire & omnino coincidere. Errores quàm minimi in rebus mathematicis non ſunt contemnendi.

Simili argumento, ſi Circulus Centro B, Radio BC, deſcriptus in longitudinem Abſciſſæ AB ad Angulos rectos uniformi cum motu ducatur, Fluxio Solidi geniti ABC erit ut Circulus ille generans; & Fluxio Superficiei ejus erit ut Perimeter Circuli illius; & Fluxio Lineæ curvæ AC conjunctim. Nam, quo Tempore Solidum ABC generatur ducendo Circulum illum in longitudinem Abſciſſæ AB, eodem Superficies ejus generatur ducendo Perimetrum Circuli illius in Longitudinem Curvæ AC. Hujus Methodi accipe etiam Exempla; quæ ſequuntur.

I.

Recta (Fig. 2.) P B *circa Polum datum* P *revolvens ſecet aliam Poſitione datam Rectam* AB : *quæritur Proportio Fluxionum Rectarum illarum* A B *&* PB. TAB. III.

Progrediatur Recta PB de loco ſuo PB in locum novum Pb. In Pb capiatur PC ipſi PB æqualis, & ad AB ducatur PD ſic, ut Angulus bPD æqualis ſit Angulo bBC; &, ob ſimilitudinem Triangulorum bBC, bPD, erit Augmentum Bb ad Augmentum Cb, ut Pb ad bD. Redeat jam Pb in locum ſuum priorem PB, ut Augmenta illa evaneſcant, & evaneſcentium Ratio ultima, id eſt, Ratio ultima Pb ad Db, ea erit quæ eſt PB ad DB, exiſtente Angulo PDB recto; & propterea in hac Ratione eſt Fluxio ipſius AB ad Fluxionem ipſius PB.

II.

TAB. II. *Recta* (Fig. 3.) PB *circa datum Polum* P *revolvens ſecet alias duas Poſitione datas Rectas* AB *&* AE, *in* B *&* E: *quæritur Proportio Fluxionum Rectarum illarum* AB *&* AE.

Progrediatur Recta revolvens PB de loco ſuo PB in locum novum Pb Rectas AB, AE in Punctis b & e ſecantem, & Rectæ AE, Parallela BC ducatur ipſi Pb occurrens in C, & erit Bb ad BC, ut Ab ad Ae; & BC ad Ee, ut PB ad PE; &, conjunctis Rationibus, Bb ad Ee, ut $Ab \times PB$ ad $Ae \times PE$. Redeat jam Linea Pb in locum ſuum priorem PB, & Augmentum evaneſcens Bb erit ad Augmentum evaneſcens Ee, ut $AB \times PB$ ad $AE \times PE$, ideóque in hac Ratione eſt Fluxio Rectæ AB ad Fluxionem Rectæ AE.

Hinc ſi Recta revolvens PB Lineas quaſvis curvas Poſitione datas ſecet in Punctis B, & E, & Rectæ jam mobiles AB, AE, Curvas illas tangant in ſectionum Punctis B, & E; erit Fluxio Curvæ, quam Recta AB tangit, ad Fluxionem Curvæ, quam Recta AE tangit, ut $AB \times PB$ ad $AE \times PE$. Id quod etiam eveniet, ſi Recta PB Curvam aliquam Poſitione datam perpetuò tangat in Puncto mobili P.

III.

Fluat Quantitas x *uniformiter, & invenienda ſit Fluxio Quantitatis* x^n.

Quo Tempore Quantitas x fluendo evadit $x+o$. Quantitas x^n evadet $\overline{x+o}^{\,n}$, id eſt, per Methodum Serierum infinitarum,
$x^n + nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2} oox^{n-2} +$; *&c.*

Et Augmenta o & $nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2} oox^{n-2} +$; *&c.*

ſunt ad ſe invicem, ut 1 & $nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2} ox^{n-2} +$; *&c.*

Eva-

Evaneſcant jam Augmenta illa, & eorum Ratio ultima erit 1 ad nx^{n-1}: ideóque Fluxio Quantitatis x eſt ad Fluxionem Quantitatis x^{n}, ut 1 ad nx^{n-1}.

Similibus argumentis, per Methodum Rationum primarum & ultimarum, colligi poſſunt Fluxiones Linearum, ſeu rectarum ſeu curvarum, in caſibus quibuſcunque; ut & Fluxiones Superficierum, Angulorum, & aliarum Quantitatum. In finitis autem Quantitatibus Analyſin ſic inſtituere, & finitarum naſcentium vel evaneſcentium Rationes primas vel ultimas inveſtigare, conſonum eſt Geometriæ Veterum; & volui oſtendere quòd in Methodo Fluxionum non opus ſit Figuras infinitè parvas in Geometriam introducere. Peragi tamen poteſt Analyſis in Figuris quibuſcunque, ſeu finitis ſeu infinitè parvis, quæ Figuris evaneſcentibus finguntur ſimiles, ut & in Figuris, quæ per Methodos ***Indiviſibilium*** pro infinitè parvis haberi ſolent, modò cautè procedas.

Ex Fluxionibus invenire Fluentes Problema difficilius eſt, & Solutionis primus gradus æquipollet Quadraturæ Curvarum; de quâ ſequentia olim ſcripſi.

TRACTA-

TRACTATUS

DE

QUADRATURA CURVARUM.

QUANTITATES indeterminatas ut Motu perpetuo creſcentes vel decreſcentes, id eſt, ut fluentes vel defluentes in ſequentibus conſidero, deſignóque litteris z, y, x, u, & earum Fluxiones, ſeu Celeritates creſcendi, noto iiſdem litteris punctatis $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{u}$. Sunt & harum Fluxionum Fluxiones, ſeu mutationes magis aut minùs celeres, quas ipſarum $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{u}$, Fluxiones ſecundas nominare licet, & ſic deſignare $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{u}$, & harum Fluxiones primas, ſeu ipſarum $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{u}$, Fluxiones tertias, ſic $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{u}$, & quartas ſic $\ddddot{z}$, $\ddddot{y}$, $\ddddot{x}$, $\ddddot{u}$. Et quemadmodum $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{u}$, ſunt Fluxiones Quantitatum $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{u}$; & hæ ſunt Fuxiones Quantitatum $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{u}$; & hæ ſunt Fluxiones Quantitatum primarum z, y, x, u: ſic hæ Quantitates conſiderari poſſunt ut Fluxiones aliarum, quas ſic deſignabo, z', y', x', u'; & hæ ut Fluxiones aliarum z'', y'', x'', u''; & hæ ut Fluxiones aliarum z''', y''', x''', u'''. Deſignant igitur z'', z', z, $\dot{z}$, $\ddot{z}$, $\dddot{z}$, $\ddddot{z}$; *&c.* Seriem Quantitatum, quarum quælibet poſterior eſt Fluxio præcedentis; & quælibet prior eſt Fluens Quantitas Fluxionem habens ſubſequentem. Similis eſt Series $\overset{\prime\prime}{\overline{\sqrt{az - zz}}}$, $\overset{\prime}{\overline{\sqrt{az - zz}}}$,

$\sqrt{az}$

Digitized by Google

$\sqrt{az-zz}$, $\dot{\overline{\sqrt{az-zz}}}$, $\ddot{\overline{\sqrt{az-zz}}}$, $\dddot{\overline{\sqrt{az-zz}}}$; ut & Series, $\overset{\prime\prime}{\frac{az+zz}{a-z}}$, $\overset{\prime}{\frac{az+zz}{a-z}}$, $\frac{az+zz}{a-z}$, $\dot{\frac{az+zz}{a-z}}$, $\ddot{\frac{az+zz}{a-z}}$, $\dddot{\frac{az+zz}{a-z}}$: & notandum eſt, quòd Quantitas quælibet prior in his Seriebus eſt, ut Area Figuræ curvilineæ, cujus ordinatim Applicata rectangula eſt Quantitas poſterior & Abſciſſa eſt z: uti $\overset{\prime}{\overline{\sqrt{az-zz}}}$ Area Curvæ, cujus Ordinata eſt $\sqrt{az-zz}$, & Abſciſſa z. Quò autem ſpectant hæc omnia patebit in Propoſitionibus, quæ ſequuntur.

PROPOSITIO I.

PROBLEMA I.

Datâ Æquatione quotcunque Fluentes Quantitates involvente, invenire Fluxiones.

SOLUTIO.

Multiplicetur omnis Æquationis Terminus per Indicem Dignitatis Quantitatis cujuſque fluentis quam involvit, & in ſingulis Multiplicationibus mutetur Dignitatis Latus in Fluxionem ſuam; & Aggregatum Factorum omnium ſub propriis Signis erit Æquatio nova.

EXPLICATIO.

Sunto a, b, c, d, *&c.* Quantitates determinatæ & immutabiles, & proponatur Æquatio quævis Quantitates fluentes z, y, x, &c. involvens, uti $x^3 - xyy + aaz - b^3 = 0$. Multiplicentur Termini primò per Indices Dignitatum x, & in ſingulis Multiplicationibus pro Dignitatis Latere, ſeu x unius Dimenſionis, ſcribatur $\dot{x}$; & Summa Factorum erit $3\dot{x}xx - \dot{x}yy$. Idem

Digitized by Google

Idem fiat in y, & prodibit $-2xy\dot{y}$. Idem fiat in z, & prodibit $aa\dot{z}$. Ponatur Summa Factorum æqualis nihilo, & habebitur Æquatio $3\dot{x}xx - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y + aa\dot{z} = 0$. Dico, quòd hac Æquatione definitur Relatio Fluxionum.

DEMONSTRATIO.

Nam, ſit o Quantitas admodum parva, & ſunto $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$, Quantitatum z, y, x Momenta, id eſt, Incrementa momentanea ſynchrona. Et, ſi Quantitates fluentes jam ſunt z, y, & x, hæ, poſt momentum temporis, Incrementis ſuis $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$, auctæ, evadent $z + o\dot{z}$, $y + o\dot{y}$, $x + o\dot{x}$, quæ in Æquatione primâ pro z, y, & x ſcriptæ, dant Æquationem $x^3 + 3xxo\dot{x} + 3xoo\dot{x}\dot{x} + ooo\dot{x}^3 - xyy - o\dot{x}yy - 2xo\dot{y}y - 2\dot{x}oo\dot{y}y - xoo\dot{y}\dot{y} - \dot{x}ooo\dot{y}\dot{y} + aaz + aao\dot{z} - b^3 = 0$. Subducatur Æquatio prior, & Reſiduum diviſum per o erit $3\dot{x}xx + 3\dot{x}\dot{x}ox + \dot{x}^3oo - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y - 2\dot{x}o\dot{y}y - xo\dot{y}\dot{y} - \dot{x}oo\dot{y}\dot{y} + aa\dot{z} = 0$. Minuatur Quantitas o in infinitum, & neglectis Terminis evaneſcentibus, reſtabit $3\dot{x}xx - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y + aa\dot{z} = 0$. *Q. E. D.*

EXPLICATIO PLENIOR.

Ad eundem modum ſi Æquatio eſſet $x^3 - xyy + aa \times \sqrt{ax - yy} - b^3 = 0$, produceretur $3xx\dot{x} - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y + aa \times \dot{\overline{\sqrt{ax - yy}}} = 0$. Ubi, ſi Fluxionem $\dot{\overline{\sqrt{ax - yy}}}$ tollere velis, pone $\sqrt{ax - yy} = z$, & erit $ax - yy = zz$, & (per hanc Propoſitionem) $a\dot{x} - 2\dot{y}y = 2\dot{z}z$, ſeu $\frac{a\dot{x} - 2y\dot{y}}{2z} = \dot{z}$, hoc eſt.

eſt, $\frac{a\dot{x} - 2y\dot{y}}{2\sqrt{ax - yy}} = \dot{\overline{\sqrt{ax - yy}}}$. Et inde $3xx\dot{x} - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y$

$+ \frac{a^3\dot{x} - 2aa\dot{y}y}{2\sqrt{ax - yy}} = 0$.

Et, per Operationem repetitam pergitur ad Fluxiones ſecundas, tertias, & ſequentes.

Sit Æquatio $zy^3 - z^4 + a^4 = 0$, & fiet, per Operationem primam, $\dot{z}y^3 + 3z\dot{y}yy - 4\dot{z}z^3 = 0$; per ſecundam $\ddot{z}y^3 + 6\dot{z}\dot{y}yy + 3z\ddot{y}yy + 6z\dot{y}\dot{y}y - 4\ddot{z}z^3 - 12\dot{z}\dot{z}zz = 0$; per tertiam $\dddot{z}y^3 + 9\ddot{z}\dot{y}yy + 9\dot{z}\ddot{y}yy + 18\dot{z}\dot{y}\dot{y}y + 3z\dddot{y}yy + 18z\ddot{y}\dot{y}y + 6z\dot{y}\dot{y}\dot{y} - 4\dddot{z}z^3 - 36\ddot{z}\dot{z}zz - 24\dot{z}\dot{z}\dot{z}z = 0$.

Ubi verò ſic pergitur ad Fluxiones ſecundas, tertias, & ſequentes, convenit Quantitatem aliquam ut uniformiter fluentem conſiderare, & pro ejus Fluxione primâ Unitatem ſcribere, pro ſecundâ verò & ſequentibus nihil. Sit Æquatio $zy^3 - z^4 + a^4 = 0$, ut ſupra; & fluat z uniformiter, ſitque ejus Fluxio Unitas, & fiet, per Operationem primam $y^3 + 3z\dot{y}yy - 4z^3 = 0$; per ſecundam $6\dot{y}yy + 3z\ddot{y}yy + 6z\dot{y}\dot{y}y - 12zz = 0$; per tertiam $9\ddot{y}yy + 18\dot{y}\dot{y}y + 3z\dddot{y}yy + 18z\ddot{y}\dot{y}y + 6z\dot{y}^3 - 24z = 0$.

In hujus autem generis Æquationibus concipiendum eſt, quòd Fluxiones in ſingulis Terminis ſint ejuſdem ordinis, id eſt, vel omnes primi ordinis $\dot{y}$, $\dot{z}$, vel omnes ſecundi, $\ddot{y}$, $\dot{y}\dot{y}$, $\dot{y}\dot{z}$, $\dot{z}\dot{z}$, vel omnes tertii $\dddot{y}$, $\ddot{y}\dot{y}$, $\ddot{y}\dot{z}$, $\dot{y}^3$, $\dot{y}\dot{y}\dot{z}$, $\dot{y}\dot{z}\dot{z}$, $\dot{z}^3$, &c. Et, ubi res aliter ſe habet, complendus eſt ordo per ſubintellectas Fluxiones Quantitatis uniformiter fluentis. Sic Æquatio noviſſima, complendo ordinem tertium, fit $9\dot{z}\ddot{y}yy + 18\dot{z}\dot{y}\dot{y}y + 3z\dddot{y}yy + 18z\ddot{y}\dot{y}y + 6z\dot{y}^3 - 24z\dot{z}^3 = 0$.

PROPOSITIO II.

PROBLEMA II.

Invenire Curvas, quæ quadrari poſſunt.

TAB. I. Sit (*Fig.* 1.) ABC Figura invenienda, BC ordinatim Applicata rectangula, & AB Abſciſſa. Producatur CB ad D ut ſit $BD = 1$, & compleatur Parallelogrammum $ABDG$: & Arearum ABC, $ABDG$ Fluxiones erunt ut BC & BD. Aſſumatur igitur Æquatio quævis, quâ Relatio Arearum definiatur, & inde dabitur Relatio Ordinatarum BC & BD per Prop. I. *Q. E. I.*

Hujus rei Exempla habentur in Propoſitionibus duabus ſequentibus.

PROPOSITIO III.

THEOR. I.

Si pro Abſciſſâ AB & Areâ AD, ſeu $AB \times 1$, promiſcuè ſcribatur z, & ſi pro $e + fz^n + gz^{2n} + hz^{3n} +$, *&c.* Scribatur R: ſit autem Area Curvæ $z^\theta R^\lambda$ erit ordinatim Applicata $BC =$

$$\theta e \; {+\theta \atop +\lambda n} fz^n \; {+\theta \atop +2\lambda n} gz^{2n} \; {+\theta \atop +3\lambda n} hz^{3n} + \text{; \&c. in } z^{\theta-1} R^{\lambda-1}.$$

DEMONSTRATIO.

Nam, ſi ſit $z^\theta R^\lambda = u$, erit, per Prop. I, $\theta \dot{z} z^{\theta-1} R^\lambda + \lambda z^\theta \dot{R} R^{\lambda-1} = \dot{u}$. Pro R^λ, in primo Æquationis Termino, & z^θ in ſecundo, ſcribe $R R^{\lambda-1}$ & $z z^{\theta-1}$, & fiet $\theta \dot{z} R + \lambda z \dot{R}$ in $z^{\theta-1} R^{\lambda-1} = \dot{u}$. Erat autem $R = e + fz^n + gz^{2n}$
$+ hz$

$+ hz^{3n} +$, &c. Et inde, per Prop. I., fit $\dot{R} = nf\dot{z}z^{n-1} + 2ng\dot{z}z^{2n-1} + 3nh\dot{z}z^{3n-1} +$ &c., quibus ſubſtitutis & ſcriptâ BD ſeu 1 pro $\dot{z}$, fiet

$$\theta e \begin{array}{c}+\theta\\+\lambda\eta\end{array} fz^{n} \begin{array}{c}+\theta\\+2\lambda\eta\end{array} gz^{2n} \begin{array}{c}+\theta\\+3\lambda\eta\end{array} hz^{3n} \begin{array}{c}+\,\&c.\\+\,\&c.\end{array} \text{ in } z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$$

$= u = BC$. *Q. E. D.*

PROPOSITIO IV.

Theor. II.

Si Curvæ Abſciſſa AB ſit z, & ſi pro $e + fz^{n} + gz^{2n} +$ &c. ſcribatur R, & pro $k + lz^{n} + mz^{2n} +$ &c. Scribatur S: ſit autem Area Curvæ $z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu}$: erit ordinatim Applicata $BC =$

$$\left.\begin{array}{l}\theta ek \quad \left.\begin{array}{l}\begin{array}{l}+\theta\\+\lambda n\end{array} fk\\ \begin{array}{l}+\theta\\+\mu n\end{array} el\end{array}\right\} z^{n} \quad \left.\begin{array}{l}\begin{array}{l}+\theta\\+2\lambda n\end{array} gk \ldots * \ldots\ldots * \ldots\\ \begin{array}{l}+\theta\\+\lambda n\\+\mu n\end{array} fl\\ \begin{array}{l}+\theta\\+2\mu n\end{array} em\end{array}\right\} z^{2n} \quad \left.\begin{array}{l}\begin{array}{l}+\theta\\+2\lambda n\\+\mu n\end{array} gl\\ \begin{array}{l}+\theta\\+\lambda n\\+2\mu n\end{array} fm\end{array}\right\} z^{3n} \ldots * \ldots \begin{array}{l}+\theta\\+2\lambda n\\+2\mu n\end{array} gmz^{4n}\end{array}\right\} \text{in } z^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1}$$

Demonſtratur ad modum Propoſitionis ſuperioris.

PROPOSITIO V.

Theor. III.

Si Curvæ Abſciſſa AB ſit z, & pro $e + fz^{n} + gz^{2n} + hz^{3n}$ $+$ &c. ſcribatur R: ſit autem ordinatim Applicata $z^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$ in $a + bz^{n} + cz^{2n} + dz^{3n} +$ &c. & ponatur $\frac{\theta}{n} = r$; $r + \lambda$ $= s$; $s + \lambda = t$; $t + \lambda = u$; &c.

erit Area $z^{\theta} R^{\lambda}$ in

$$+ \frac{\frac{1}{n} a}{re}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n} b - sfA}{\overline{r+1} \times e} z^{n}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n} c - \overline{s+1} \times fB - tgA}{\overline{r+2} \times e} z^{2n}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n} d - \overline{s+2} \times fC - \overline{t+1} \times gB - uhA}{\overline{r+3} \times e} z^{3n}$$

$$+ \frac{- 1 \overline{s+3} \times fD - \overline{t+2} \times gC - \overline{u+1} \times hB}{\overline{r+4} \times e} z^{4n}$$

$+$ &c.

Ubi A, B, C, D, &c. denotant totas Coefficientes datas Terminorum ſingulorum in Serie cum ſignis ſuis $+$, & $-$, nempe

A primi Termini Coefficientem $+ \frac{\frac{1}{n} a}{re}$

B ſecundi Termini Coefficientem $+ \frac{\frac{1}{n} b - sfA}{\overline{r+1} \times e}$

C tertii Termini Coefficientem $+ \frac{\frac{1}{n} c - \overline{s+1} \times fB - tgA}{\overline{r+2} \times e}$

Et ſic deinceps.

D E.

DEMONSTRATIO.

Sunto, juxta Propoſitionem tertiam

CURVARUM ORDINATÆ.

$$\left.\begin{array}{lllll}
1.\ \theta e & \begin{array}{l}+\theta\\+\lambda e\end{array} fAz^{n} & \begin{array}{l}+\theta\\+2\lambda n\end{array} gAz^{2n} & \begin{array}{l}+\theta\\+3\lambda n\end{array} bAz^{3n} & \begin{array}{l}+\&c.\\+\&c.\end{array}\\
2.\ \ldots & \begin{array}{l}+\theta\\+n\end{array} eBz^{n} & \begin{array}{l}+\theta\\+n\\+\lambda n\end{array} fBz^{2n} & \begin{array}{l}+\theta\\+n\\+2\lambda n\end{array} gBz^{3n} & \begin{array}{l}+\&c.\\+\&c.\\+\&c.\end{array}\\
3.\ \ldots & \ldots & \begin{array}{l}+\theta\\+2n\end{array} eCz^{2n} & \begin{array}{l}+\theta\\+2n\\+\lambda n\end{array} fCz^{3n} & \begin{array}{l}+\&c.\\+\&c.\\+\&c.\end{array}\\
4.\ \ldots & \ldots & \ldots & \begin{array}{l}+\theta\\+3n\end{array} eDz^{3n} & \begin{array}{l}+\&c.\\+\&c.\end{array}
\end{array}\right\}\text{in } z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$$

CURVARUM AREÆ.

1. $Az^{\theta}R^{\lambda}$
2. $Bz^{\theta+n}R^{\lambda}$
3. $Cz^{\theta+2n}R^{\lambda}$
4. $Dz^{\theta+3n}R^{\lambda}$

Et ſi Summa Ordinatarum ponatur æqualis Ordinatæ $a+bz^{n}+cz^{2n}+dz^{3n}+$ *&c.* in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, Summa Arearum $z^{\theta}R^{\lambda}$ in $A+Bz^{n}+Cz^{2n}+Dz^{3n}+$ *&c.* æqualis erit Areæ Curvæ, cujus iſta eſt Ordinata. Æquentur igitur Ordinatarum Termini correſpondentes,

& fiet $a=\theta eA$,

$b=\overline{\theta+\lambda n}\times fA+\overline{\theta+n}\times eB$,

$c=\overline{\theta+2\lambda n}\times gA+\overline{\theta+n+\lambda n}\times fB+\overline{\theta+2n}\times eC$,

&c.

&c.

& inde $A = \frac{a}{\theta e}$

$$B = \frac{b - \overline{\theta + \lambda\,\mathrm{n}} \times fA}{\overline{\theta + \mathrm{n}} \times e}$$

$$C = \frac{c - \overline{\theta + 2\lambda\,\mathrm{n}} \times gA - \overline{\theta + \mathrm{n} + \lambda\mathrm{n}} \times fB}{\overline{\theta + 2\mathrm{n}} \times e}$$

Et ſic deinceps in infinitum.

Pone jam $\frac{\theta}{\mathrm{n}} = r$; $r + \lambda = s$; $s + \lambda = t$ *&c.* & in Areâ $z^{\theta} R^{\lambda}$ in $A + Bz^{\mathrm{n}} + Cz^{2\mathrm{n}} + Dz^{3\mathrm{n}} +$ *&c.* ſcribe ipſorum A, B, C, *&c.* valores inventos, & prodibit Series propoſita. *Q. E. D.*

Et notandum eſt, quòd Ordinata omnis duobus modis in Seriem reſolvitur. Nam Index n vel affirmativus eſſe poteſt, vel negativus.

Proponatur Ordinata $\frac{3k - lzz}{zz\sqrt{kz - lz^3 + mz^4}}$. Hæc vel ſic ſcribi poteſt $z^{-\frac{5}{2}} \times \overline{3k - lzz} \times \overline{k - lzz + mz^3}|^{-\frac{1}{2}}$, vel ſic $z \times \overline{-l + 3kz^{-2}} \times \overline{m - lz^{-1} + kz^{-3}}|^{-\frac{1}{2}}$.

In Caſu priore eſt $a = 3k$; $b = 0$; $c = -l$; $e = k$; $f = 0$; $g = -l$; $h = m$; $\lambda = -\frac{1}{2}$; $\mathrm{n} = 1$; $\theta - 1 = -\frac{5}{2}$; $\theta = -\frac{3}{2} = r$; $s = -1$; $t = -\frac{1}{2}$; $u = 0$.

In poſteriore eſt $a = -l$; $b = 0$; $c = 3k$; $e = m$; $f = -l$; $g = 0$; $h = 1$; $\lambda = -\frac{1}{2}$; $\mathrm{n} = -1$; $\theta - 1 = 1$; $\theta = 2$; $r = -2$; $s = -1\frac{1}{2}$; $t = -1$; $u = -\frac{1}{2}$;

Tentandus eſt caſus uterque. Et, ſi Serierum alterutra ob Terminos tandem deficientes abrumpitur ac terminatur, habebitur Area Curvæ in Terminis finitis. Sic, in Exempli hujus priore Caſu, ſcribendo in Serie valores ipſorum $a, b, c, e, f, g, h, \lambda, \theta, r, s, t, u,$

Termini

Termini omnes poſt primum evaneſcunt in infinitum, & Area Curvæ prodit $-2\sqrt{\frac{k - lzz + mz^4}{z^4}}$. Et hæc Area ob ſignum negativum adjacet Abſciſſæ ultra Ordinatam productæ. Nam, Area omnis affirmativa adjacet tam Abſciſſæ quàm Ordinatæ; negativa verò cadit ad contrarias partes Ordinatæ, & adjacet Abſciſſæ productæ, manente ſcilicet ſigno Ordinatæ. Hoc modo Series alterutra, & nonnumquam utraque, ſemper terminatur & finita evadit, ſi Curva geometricè quadrari poteſt. At, ſi Curva talem Quadraturam non admittit, Series utraque continuabitur in infinitum, & earum altera converget & Aream dabit approximando, præterquàm ubi r, (propter Aream infinitam,) vel nihil eſt, vel numerus integer & negativus; vel ubi $\frac{z}{e}$ æqualis eſt Unitati. Si $\frac{z}{e}$ minor eſt Unitate, converget Series, in quâ Index n affirmativus eſt: ſin $\frac{z}{e}$ Unitate major eſt, converget Series altera. In uno Caſu Area adjacet Abſciſſæ ad uſque Ordinatam ductæ, in altero adjacet Abſciſſæ ultra Ordinatam productæ.

Nota inſuper, quòd ſi Ordinata contentum eſt ſub Factore rationali $\mathcal{Q}$, & Factore ſurdo irreducibili R^{π}, & Factoris ſurdi Latus R non dividit Factorem rationalem $\mathcal{Q}$; erit $\lambda - 1 = \pi$; & $R^{\lambda - 1} = R^{\pi}$. Sin Factoris ſurdi Latus R dividit Factorem rationalem ſemel, erit $\lambda - 1 = \pi + 1$, & $R^{\lambda - 1} = R^{\pi + 1}$: ſi dividat bis, erit $\lambda - 1 = \pi + 2$, & $R^{\lambda - 1} = R^{\pi + 2}$: ſi ter, erit $\lambda - 1 = \pi + 3$, & $R^{\lambda - 1} = R^{\pi + 3}$: & ſic deinceps.

Si Ordinata eſt Fractio rationalis irreducibilis cum Denominatore ex duobus vel pluribus Terminis compoſito; reſolvendus eſt Denominator in Diviſores ſuos omnes primos. Et ſi Diviſor ſit aliquis, cui nullus alius eſt æqualis, Curva quadrari nequit; ſin duo vel plures ſint Diviſores æquales, rejiciendus eſt eorum unus; & ſi adhuc alii duo vel plures ſint ſibi mutuò æquales & prioribus inæquales, rejiciendus eſt etiam eo-

 rum

rum unus; & ſic in aliis omnibus æqualibus, ſi adhuc plures ſint: deinde Diviſor, qui relinquitur, vel contentum ſub Diviſoribus omnibus, qui relinquuntur, ſi plures ſunt, ponendum eſt pro R, & ejus Quadrati reciprocum R^{-2} pro $R^{\lambda-1}$, præterquàm ubi contentum illud eſt Quadratum, vel Cubus, vel Quadrato-Quadratum, &c. quo caſu ejus Latus ponendum eſt pro R, & Poteſtatis Index 2, vel 3, vel 4, negativè ſumptus pro λ. Et Ordinata ad Denominatorem R^2, vel R^3, vel R^4, vel R^5 *&c.* reducenda.

Ut, ſi Ordinata ſit $\frac{z^5+z^4-8z^3}{z^5+z^4-5z^3-zz+8z-4}$, quoniam hæc Fractio irreducibilis eſt, & Denominatoris Diviſores ſunt pares, nempe $z-1$, $z-1$, $z-1$, & $z+2$, $z+2$, rejicio Magnitudinis utriuſque Diviſorem unum, & reliquorum $z-1$, $z-1$, $z+2$, contentum z^3-3z+2 pono pro R, & ejus Quadrati reciprocum $\frac{1}{R^2}$, ſeu R^{-2}, pro $R^{\lambda-1}$. Dein Ordinatam ad Denominatorem R^2 ſeu $R^{1-\lambda}$ reduco, & fit $\frac{z^6-9z^4+8z^3}{\overline{z^3-3z+2}|^2}$, id eſt, $z^3\times\overline{8-9z+z^3}\times\overline{2-3z+z^3}|^{-2}$. Et inde eſt $a=8$; $b=-9$; $c=0$; $d=-1$; *&c.* $e=2$; $f=-3$; $g=0$; $h=1$; $\lambda-1=-2$; $\lambda=-1$; $n=1$; $\theta-1=3$; $\theta=4=r$; $s=3$; $t=2$; $u=1$. Et his in Serie ſcriptis prodit Area $\frac{z^4}{z^3-3z+2}$, Terminis omnibus in tota Serie poſt primum evaneſcentibus.

Si denique Ordinata eſt Fractio irreducibilis, & ejus Denominator contentum eſt ſub Factore rationali Q, & Factore ſurdo irreducibili R^{π}, inveniendi ſunt Lateris R Diviſores omnes primi, & rejiciendus eſt Diviſor unus Magnitudinis cujuſque; & per Diviſores qui reſtant, ſi qui ſint, multiplicandus eſt Factor rationalis Q: & ſi factum æquale eſt Lateri R, vel Lateris illius Poteſtati alicui, cujus Index eſt numerus integer, eſto Index ille m, & erit $\lambda-1=-\pi-m$; & $R^{\lambda-1}=R^{-\pi-m}$.

Ut,

Ut, ſi Ordinata ſit $\frac{3q^5 - q^4x + 9q^3xx - qqx^3 - 6qx^4}{qq - xx \times \sqrt[3]{q^3 + qqx - qxx - x^3}}$; quoniam Factoris ſurdi Latus R, ſeu $q^3 + qqx - qxx - x^3$; Diviſores habet $q + x$, $q + x$, $q - x$, qui duarum ſunt Magnitudinum, rejicio Diviſorem unum Magnitudinis utriuſque, & per Diviſorem $q + x$, qui relinquitur, multiplico Factorem rationalem $qq - xx$. Et quoniam Factum $q^3 + qqx - qxx - x^3$ æquale eſt Lateri R, pono $m = 1$, &, inde, cùm π ſit $\frac{1}{3}$, fit $\lambda - 1 = -\frac{4}{3}$. Ordinatam igitur reduco ad Denominatorem $R^{-\frac{4}{3}}$, & fit $x^0 \times \overline{3q^6 + 2q^5x + 8q^4xx + 8q^3x^3 - 7qqx^4 - 6qx^5} \times \overline{q^3 + qqx - qxx - x^3}|^{-\frac{4}{3}}$. Unde eſt $a = 3q^6$; $b = 2q^5$; &c., $e = q^3$; $f = qq$; &c., $\theta - 1 = 0$; $\theta = 1 = n$; $\lambda = -\frac{1}{3}$; $r = 1$; ſ $= \frac{2}{3}$; $t = \frac{1}{3}$; $u = 0$. Et his in Serie ſcriptis, prodit Area $\frac{3qqx + 3x^3}{\sqrt[3]{q^3 + qqx - qxx - x^3}}$, Terminis omnibus in Serie totâ poſt tertium evaneſcentibus.

PROPOSITIO VI.

THEOR. IV.

Si Curvæ Abſciſſa AB ſit z, & ſcribantur R pro $e + fz^n + gz^{2n} + hz^{3n} +$ &c. & S pro $k + lz^n + mz^{2n} + pz^{3n}$ &c. Sit autem ordinatim Applicata $z^{\theta - 1}R^{\lambda - 1} \times S^{\mu - 1}$ in $a + bz^n + cz^{2n} + dz^{3n} +$ &c., &, ſi Terminorum $e, f, g, h,$ &c., & $k, l, m, p,$ &c. Rectangula ſint.

ek	fk	gk	hk;	&c.
el	fl	gl	hl;	&c.
em	fm	gm	hm;	&c.
ep	fp	gp	hp;	&c.

Et ſi Rectangulorum illorum Coefficientes numerales ſint reſpectivè.

$$\frac{1}{n\theta} = r;\ r+\lambda = s;\ s+\lambda = t;\ t+\lambda = v;\ \&c.$$

$$r+\mu = s';\ s+\mu = t';\ t+\mu = v';\ v+\mu = w';\ \&c.$$

$$s'+\mu = t'';\ t'+\mu = v'';\ v'+\mu = w'';\ w'+\mu = x'';\ \&c.$$

$$t''+\mu = v''';\ v''+\mu = w''';\ w''+\mu = x''';\ x''+\mu = y''';\ \&c.$$

Area Curvæ erit hæc

$$z^{\theta} R^{\lambda} S^{\mu} \text{ in } + \frac{\frac{1}{n}a}{rek}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n}b - sfkA - s'el}{\overline{r+1}\times ek} z^{n}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n}c - \overline{s+1}\times fkB - t'fl - tgkA - \overline{s'+1}\times el - t''em}{\overline{r+2}\times ek} z^{2n}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n}d - \overline{s+2}\times fkC - \overline{t'+1}\times fl - v''fm - vhkA - \overline{t+1}\times gkB - v'gl - \overline{s'+2}\times el - \overline{t''+1}\times em - v'''en}{\overline{r+3}\times ek} z^{3n}$$

$$+ \&c.$$

Ubi A denotat Termini primi Coefficientem datum $\frac{\frac{1}{n}a}{rek}$ cum ſigno ſuo $+$ vel $-$; B Coefficientem datum ſecundi; C Coefficientem datum tertii; & ſic deinceps. Terminorum verò, a, b, c, &c. e, f, g, &c. k, l, m, &c. unus vel plures deeſſe poſſunt. Demonſtratur Propoſitio ad modum præcedentis, & quæ ibi notantur hic

hic obtinent. Pergit autem Series talium Propoſitionum in infinitum, & Progreſſio Seriei manifeſta eſt.

PROPOSITIO VII.

Theor. V.

Si pro $e + fz^{n} + gz^{2n} +$ *&c.* ſcribatur R ut ſupra, & in Curvæ alicujus Ordinatâ $z^{\theta \pm n\sigma} R^{\lambda \pm \tau}$ maneant Quantitates datæ θ, n, λ, e, f, g, *&c.* & pro σ ac τ ſcribantur ſucceſſivè numeri quicunque integri: & ſi detur Area unius ex Curvis, quæ per Ordinatas innumeras ſic prodeuntes deſignantur, ſi Ordinatæ ſunt duorum nominum in Vinculo Radicis, vel, ſi dentur Areæ duarum ex Curvis, ſi Ordinatæ ſunt trium nominum in Vinculo Radicis, vel Areæ trium ex Curvis, ſi Ordinatæ ſunt quatuor nominum in Vinculo Radicis, & ſic deinceps in infinitum: dico, quòd dabuntur Areæ Curvarum omnium. Pro nominibus hìc habeo Terminos omnes in Vinculo Radicis tam deficientes quàm plenos, quorum Indices Dignitatum ſunt in Progreſſione arithmeticâ. Sic Ordinata $\sqrt{a^{4} - ax^{3} + x^{4}}$ ob Terminos duos inter a^{4} & $-ax^{3}$ deficientes pro Quinquinomio haberi debet. At $\sqrt{a^{4} + x^{4}}$ Binomium eſt, & $\sqrt{a^{4} + x^{4} - \frac{x^{8}}{a^{4}}}$ Trinomium, cùm Progreſſio jam per majores differentias procedat. Propoſitio verò ſic demonſtratur.

CASUS I.

Sunto Curvarum duarum Ordinatæ $pz^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$, & $qz^{\theta + n - 1} \times R^{\lambda - 1}$, & Areæ pA, & qB, exiſtente R Quantitate trium nominum $e + fz^{n} + gz^{2n}$.

Et, cùm per Prop. III., ſit $z^{\theta} R^{\lambda}$ Area Curvæ, cujus Ordinata eſt $\begin{matrix} \theta e \\ + \lambda n \end{matrix} \begin{matrix} + \theta \\ fz^{n} \end{matrix} \begin{matrix} + \theta \\ + 2\lambda n \end{matrix}\; gz^{2n}$ in $z^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$, ſubduc Ordi-

 natas

natas & Areas priores de Areâ & Ordinatâ poſteriori, & manebit

$$\begin{array}{l} \theta e \\ -p \\ \end{array} \begin{array}{l} +\theta \\ +\lambda n \\ \end{array} f z^{n} \begin{array}{l} +\theta \\ +2\lambda n \end{array} g z^{2n} \text{ in } z^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}, \quad \begin{array}{l} \\ \\ -qz^{n} \end{array}$$

Ordinata nova Curvæ; & $z^{\theta} R^{\lambda} - pA - qB$ ejuſdem Area. Pone $\theta e = p$; & $\theta f + \lambda n f = q$, & Ordinata evadet $\begin{array}{l}\theta \\ +2\lambda n\end{array} g z^{2n}$ in $z^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$, & Area $z^{\theta} R^{\lambda} - \theta e A - \theta f B - \lambda n f B$. Divide utramque per $\theta g + 2\lambda n g$, & Aream prodeuntem dic C, & aſſumptâ utcunque r, erit rC Area Curvæ, cujus Ordinata eſt $r z^{\theta + 2n - 1} R^{\lambda - 1}$. Et, quâ ratione ex Areis pA & qB Aream rC Ordinatæ $r z^{\theta + 2n - 1} R^{\lambda - 1}$ congruentem invenimus, licebit ex Areis qB & rC Aream quartam, puta fD, Ordinatæ $f z^{\theta + 3n - 1} R^{\lambda - 1}$ congruentem invenire, & ſic deinceps in infinitum. Et par eſt ratio Progreſſionis ab Areis B & A in partem contrariam pergentis. Si Terminorum θ, $\theta + \lambda n$, & $\theta + 2\lambda n$ aliquis deficit & Seriem abrumpit, aſſumatur Area pA in principio Progreſſionis unius, & Area qB in principio alterius, & ex his duabus Areis dabuntur Areæ omnes in Progreſſione utrâque. Et contra, ex aliis duabus Areis aſſumptis fit regreſſus per Analyſin ad Areas A & B, adeò ut ex duabus datis ceteræ omnes dentur. *Q. E. O.*

Hic eſt caſus Curvarum, ubi ipſius z Index θ augetur vel diminuitur perpetuâ Additione vel Subductione Quantitatis n. Caſus alter eſt Curvarum ubi Index λ augetur vel diminuitur Unitatibus.

CASUS II.

Ordinatæ $p z^{\theta - 1} R^{\lambda}$ & $q z^{\theta + n - 1} R^{\lambda}$, quibus Areæ pA & qB jam reſpondeant, ſi in R, ſeu $e + f z^{n} + g z^{2n}$, ducantur, ac deinde ad R viciſſim applicentur, evadunt $pe + pf z^{n} + pg z^{2n}$ in $z^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$, & $qe z^{n} + qf z^{2n} + qg z^{3n}$ in $z^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$. Et, per Prop. III., eſt $a z^{\theta} R^{\lambda}$ Area Curvæ, cujus Ordinata eſt

$\theta a e$

$\theta ae \begin{array}{c}+\theta\\+\lambda n\end{array} afz^{n} \begin{array}{c}+\theta\\+2\lambda n\end{array} agz^{2n}$ in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, & $bz^{\theta+n}R^{\lambda}$ Area Curvæ, cujus Ordinata eſt $\begin{array}{c}+\theta\\+n\end{array} bez^{n}$, $\begin{array}{c}+\theta\\+n\\+\lambda n\end{array} bfz^{2n} \begin{array}{c}+\theta\\+n\\+2\lambda n\end{array} bgz^{3n}$ in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$. Et harum quatuor Arearum Summa eſt $pA + qB + az^{\theta}R^{\lambda} + bz^{\theta+n}R^{\lambda}$, & Summa reſpondentium Ordinatarum,

$$\left.\begin{array}{l} \theta ae \begin{array}{c}+\theta\\+\lambda n\end{array} af \\[2ex] pe \begin{array}{c}+\theta\\+n\end{array} be \\[2ex] \quad + pf \\ \quad + qe \end{array}\right\} z^{n} \left.\begin{array}{l} \begin{array}{c}+\theta\\+2\lambda n\end{array} ag \\[2ex] \begin{array}{c}+\theta\\+n\\+\lambda n\end{array} bf \\[2ex] + pg \\ + qf \end{array}\right\} z^{2n} + \left.\begin{array}{l} \begin{array}{c}+\theta\\+n\\+2\lambda n\end{array} bg \\[2ex] qg \\[2ex] \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{array}\right\} z^{3n} \quad \text{in } z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$$

Si Terminus primus, tertius, & quartus ponantur ſeorſim æquales nihilo, per primum fiet $\theta ae + pe = 0$, ſeu $-\theta a = p$, per quartum $-\theta b - nb - 2\lambda nb = q$, & per tertium (eliminando p & q) $\frac{2ag}{f} = b$. Unde ſecundus fit $\frac{\lambda naff - 4\lambda nage}{f}$; adeoque Summa quatuor Ordinatarum eſt $\frac{\lambda naff - 4\lambda nage}{f} z^{\theta+n-1} R^{\lambda-1}$, & Summa totidem reſpondentium Arearum eſt $az^{\theta}R^{\lambda} + \frac{2ag}{f} z^{\theta+n} R^{\lambda} - \theta aA - \frac{2\theta+2n+4\lambda n}{f} agB$. Dividantur hæ Summæ per $\frac{\lambda naff + 4\lambda nage}{f}$, & ſi Quotum poſterius dicatur D, erit D Area Curvæ, cujus Ordinata eſt Quotum prius $z^{\theta+n-1} \times R^{\lambda-1}$. Et, eâdem ratione, ponendo omnes Ordinatæ Terminos, præter primum, æquales nihilo, poteſt Area

Curvæ

Curvæ inveniri, cujus Ordinata eſt $z^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$. Dicatur Area iſta C; & quâ ratione ex Areis A & B inventæ ſunt Areæ C ac D, ex his Areis C ac D inveniri poſſunt aliæ duæ E & F Ordinatis $z^{\theta - 1} R^{\lambda - 2}$ & $z^{\theta + n - 1} R^{\lambda - 2}$ congruentes, & ſic deinceps in infinitum. Et, per Analyſin contrariam, regredi licet ab Areis E & F ad Areas C ac D, & inde ad Areas A & B, aliáſque, quæ in Progreſſione ſequuntur. Igitur ſi Index λ perpetuâ Unitatum Additione vel Subductione augeatur vel minuatur, & ex Areis, quæ Ordinatis ſic prodeuntibus reſpondent, duæ ſimpliciſſimæ habeantur, dantur aliæ omnes in infinitum. *Q. E. O.*

CASUS III.

Et per Caſus hoſce duos conjunctos, ſi tam Index θ perpetuâ Additione vel Subductione ipſius n, quàm Index λ perpetuâ Additione vel Subductione Unitatis, utcunque augeatur vel minuatur, dabuntur Areæ ſingulis prodeuntibus Ordinatis reſpondentes. *Q. E. O.*

CASUS IV.

Et ſimili argumento, ſi Ordinata conſtat ex quatuor nominibus in Vinculo Radicali, & dantur tres Arearum; vel ſi conſtat ex quinque nominibus, & dantur quatuor Arearum, & ſic deinceps: dabuntur Areæ omnes, quæ addendo vel ſubducendo numerum n Indici θ, vel Unitatem Indici λ generari poſſunt. Et par eſt ratio Curvarum, ubi Ordinatæ ex Binomiis conflantur, & Area una earum, quæ non ſunt geometricè quadrabiles, datur. *Q. E. O.*

PROPOSITIO VIII.

THEOR. VI.

Si pro $e + fz^n + gz^{2n} +$ &c., & $k + lz^n + mz^{2n} +$ &c. ſcribantur R & S ut ſupra, & in Curvæ alicujus Ordinatâ $z^{\theta \pm n\sigma} \times$

$R^{\lambda \pm \sigma}$

$R^{\lambda \pm \tau} S^{\mu \pm \upsilon}$ maneant Quantitates datæ θ, n, λ, μ, e, f, g, k, l, m, *&c.* Et pro σ, τ, & υ, ſcribantur ſucceſſivè numeri quicunque integri: & ſi dentur Areæ duarum ex Curvis, quæ per Ordinatas ſic prodeuntes deſignantur, ſi Quantitates *R* & *S* ſunt Binomia; vel ſi dentur Areæ trium ex Curvis, ſi *R* & *S* conjunctim ex quinque nominibus conſtant; vel Areæ quatuor ex Curvis, ſi *R* & *S* conjunctim ex ſex nominibus conſtant; & ſic deinceps in infinitum: dico quòd dabuntur Areæ Curvarum omnium.

Demonſtratur ad modum Propoſitionis ſuperioris.

PROPOSITIO IX.

Theor. VII.

Æquantur Curvarum Areæ inter ſe, quarum Ordinatæ ſunt reciprocè ut Fluxiones Abſciſſarum.

Nam, contenta ſub Ordinatis & Fluxionibus Abſciſſarum erunt æqualia, & Fluxiones Arearum ſunt ut hæc contenta.

Coroll. I.

Si aſſumatur Relatio quævis inter Abſciſſas duarum Curvarum, & inde, per Prop. I., quæratur Relatio Fluxionum Abſciſſarum, & ponantur Ordinatæ reciprocè proportionales Fluxionibus, inveniri poſſunt innumeræ Curvæ, quarum Areæ ſibi mutuò æquales erunt.

Coroll. II.

Sic enim Curva omnis, cujus hæc eſt Ordinata $z^{\theta - 1}$ in $\overline{e + fz^{\mathrm{n}} + gz^{2\mathrm{n}} + \&c.}|^{\lambda}$ aſſumendo Quantitatem quamvis pro ν, & ponendo $\frac{\mathrm{n}}{\nu} = s$, & $z^{s} = x$, migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $\frac{\nu}{\mathrm{n}} x^{\frac{\nu\theta - \mathrm{n}}{\mathrm{n}}}$ in $\overline{e + fx^{\nu} + gx^{2\nu} + \&c.}|^{\lambda}$

Coroll. III.

Et Curva omnis, cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1}$ in $\overline{a+bz^{n}+cz^{2n}+\&c.}\times\overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda}$ aſſumendo Quantitatem quamvis pro ν, & ponendo $\frac{n}{\nu}=ſ$; & $z^{ſ}=x$, migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $\frac{\nu}{n}x^{\frac{\nu\theta-n}{n}}$ in $\overline{a+bx^{\nu}+cx^{2\nu}+\&c.}\times\overline{e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\&c.}|^{\lambda}$

Coroll. IV.

Et Curva omnis, cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1}$ in $\overline{a+bz^{n}+cz^{2n}+\&c.}\times\overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda}\times\overline{k+lz^{n}+mz^{2n}+\&c.}|^{\mu}$, Aſſumendo Quantitatem quamvis pro ν, & ponendo $\frac{n}{\nu}=ſ$, & $z^{ſ}=x$, migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $\frac{\nu}{n}x^{\frac{\nu\theta-n}{n}}$ in $\overline{a+bx^{\nu}+cx^{2\nu}+\&c.}\times\overline{e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\&c.}|^{\lambda}\times\overline{k+lx^{\nu}+mx^{2\nu}+\&c.}|^{\mu}$.

Coroll. V.

Et Curva omnis, cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1}$ in $\overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda}$. Ponendo $\frac{1}{z}=x$, migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $x^{-\overline{\theta+1}}\times\overline{e+fx^{-n}+gx^{-2n}+\&c.}|^{\lambda}$, id eſt, $x^{-\overline{\theta+1+n\lambda}}\times\overline{f+ex^{n}}|^{\lambda}$, ſi duo ſunt nomina in Vinculo Radicis, vel $\frac{1}{x^{\theta+1+2n\lambda}}\times\overline{g+fx^{n}+ex^{2n}}|^{\lambda}$, ſi tria ſunt nomina; & ſic deinceps.

Coroll.

Coroll. VI.

Et Curva omnis, cujus Ordinata eſt $z^{\theta-1}$ in $\overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda} \times \overline{k+lz^{n}+mz^{2n}+\&c.}|^{\mu}$, ponendo $\frac{1}{z}=x$, migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $\frac{1}{x^{\theta+1}}\times\overline{e+fx^{-n}+gx^{-2n}+\&c.}|^{\lambda} \times\overline{k+lx^{-n}+mx^{-2n}+\&c.}|^{\mu}$, id eſt, $\frac{1}{x^{\theta+1+n\lambda+n\mu}} \times \overline{f+ex^{n}}|^{\lambda}\times\overline{l+kx^{n}}|^{\mu}$, ſi bina ſunt nomina in Vinculis Radicum, vel $\frac{1}{x^{\theta+1+2n\lambda+n\mu}}\times\overline{g+fx^{n}+ex^{2n}}|^{\lambda}\times\overline{l+kx^{n}}|^{\mu}$: ſi tria ſunt nomina in Vinculo Radicis prioris, ac duo in Vinculo poſterioris; & ſic in aliis.

Et nota, quòd Areæ duæ æquales in noviſſimis hiſce duobus Corollariis jacent ad contrarias partes Ordinatarum. Si Area in alterutrâ Curvâ adjacet Abſciſſæ, Area huic æqualis in alterâ Curvâ adjacet Abſciſſæ productæ.

Coroll. VII.

Si Relatio inter Curvæ alicujus Ordinatam y & Abſciſſam z definiatur per Æquationem quamvis affectam hujus formæ, y^{α} in $\overline{e+fy^{n}z^{\delta}+gy^{2n}z^{2\delta}+hy^{3n}z^{3\delta}+\&c.}=z^{\beta}$ in $\overline{k+ly^{n}z^{\delta}+my^{2n}z^{2\delta}+\&c.}$, hæc Figura, aſſumendo $s=\frac{n-\delta}{n}$, $x=\frac{1}{s}z^{s}$, & $\lambda=\frac{n-\delta}{\alpha\delta+\beta n}$, migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Abſciſſa x, ex datâ Ordinatâ u, determinatur per Æquationem non affectam $\frac{1}{s}u^{\alpha\lambda}\times\overline{e+fu^{n}+gu^{2n}+hu^{3n}+\&c.}|^{\lambda}\times\overline{k+lu^{n}+mu^{2n}+\&c.}|^{-\lambda}=x$.

COROLL. VIII.

Si Relatio inter Curvæ alicujus Ordinatam y & Abſciſſam z, definitur per Æquationem quamvis affectam hujus formæ y^{α} in $\overline{e + fy^{n} z^{\delta} + gy^{2n} z^{2\delta} + \&c.} = z^{\beta}$ in $\overline{k + ly^{n} z^{\delta} + my^{2n} z^{2\delta} + \&c.} + z^{\gamma}$ in $\overline{p + qy^{n} z^{\delta} + ry^{2n} z^{2\delta} + \&c.}$ hæc Figura, aſſumendo $s = \frac{n - \delta}{n}$, $x = \frac{1}{s} z^{s}$, $\mu = \frac{\alpha\delta + \beta n}{n - \delta}$, & $\nu = \frac{\alpha\delta + \gamma n}{n - \delta}$, migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Abſciſſa x ex datâ Ordinata u, determinatur per Æquationem minùs affectam u^{α} in $\overline{e + fu^{n} + gu^{2n} + \&c.} = s^{\mu} x^{\mu}$ in $\overline{k + lu^{n} + mu^{2n} + \&c.} + s^{\nu} x^{\nu}$ in $\overline{p + qu^{n} + ru^{2n} + \&c.}$

COROLL. IX.

Curva omnis, cujus Ordinata eſt $\pi z^{\theta - 1}$ in $\overline{\nu e \, {+\nu \atop +n} fz^{n} \, {+\nu \atop +2n} gz^{2n} + \&c.} \times \overline{e + fz^{n} + gz^{2n} + \&c.}\big|^{\lambda - 1} \times \overline{a + b \times \overline{ez^{\nu} + fz^{\nu + n} + gz^{\nu + 2n} + \&c.}\big|^{\tau}}\big|^{\omega}$ ſi ſit $\theta = \nu\lambda$, & aſſumantur $x = \overline{ez^{\nu} + fz^{\nu + n} + gz^{\nu + 2n} + \&c.}\big|^{\pi}$, $\sigma = \frac{\tau}{\pi}$, & $\vartheta = \frac{\lambda - \pi}{\omega}$ migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $x^{\vartheta} \times \overline{a + bx^{\sigma}}\big|^{\omega}$.

Et nota, quòd Ordinata prior in hoc Corollariò evadit ſimplicior ponendo $\lambda = 1$, vel ponendo $\tau = 1$, & efficiendo, ut Radix Dignitatis extrahi poſſit cujus Index eſt ω, vel etiam ponendo $\omega = -1$, & $\lambda = 1 = \tau = \sigma = \pi$, ut alios Caſus prætercam.

COROL-

COROLL. X.

Pro $ez^{\nu} + fz^{\nu+n} + gz^{\nu+2n} + \&c.\ \nu e z^{\nu-1} \begin{matrix}+\nu\\+n\end{matrix} f z^{\nu+n-1} \begin{matrix}+\nu\\+2n\end{matrix} g z^{\nu+2n-1} + \&c.\ k + lz^{n} + m z^{2n} + \&c.$ & $nlz^{n-1} + 2nmz^{2n-1} + \&c.$ ſcribantur R, $\dot{r}$, S & $\dot{ſ}$ reſpectivè, & Curva omnis, cujus Ordinata eſt $\pi S\dot{r} + \phi R\dot{ſ}$ in $R^{\lambda-1} S^{\mu-1} \times \overline{aS^{\sigma} + bR^{\tau}}^{\omega}$, ſi ſit $\frac{\mu - \nu\omega}{\lambda} = \frac{\upsilon}{\tau} = \frac{\phi}{\pi}$, $\frac{\tau}{\pi} = \sigma$, $\frac{\lambda - \pi}{\pi} = \vartheta$, & $R^{\pi} S^{\phi} = x$, migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $x^{\vartheta} \times \overline{a + bx^{\sigma}}^{\omega}$.

Et nota, quòd Ordinata prior evadit ſimplicior, ponendo Unitates pro τ, υ, & λ, vel μ, & faciendo ut Radix Dignitatis extrahi poſſit cujus Index eſt ω, vel ponendo $\omega = -1$, vel $\mu = 0$.

PROPOSITIO X.

PROBL. III.

Invenire Figuras ſimpliciſſimas, cum quibus Curva quævis geometricè comparari poteſt, cujus ordinatim Applicata y per Æquationem non affectam ex datâ Abſciſſâ z determinatur.

CASUS I.

Sit Ordinata $az^{\theta-1}$, & Area erit $\frac{1}{\theta} az^{\theta}$, ut ex Propoſ. V., ponendo $b = o = c = d = f = g = h$, & $e = 1$, facilè colligitur.

CASUS II.

Sit Ordinata $a z^{\theta - 1} \times \overline{e + f z^{n} + g z^{2n} + \&c.}|^{\lambda - 1}$ Et, ſi Curva cum Figuris rectilineis geometricè comparari poteſt, quadrabitur per Prop. V. ponendo $b = a = c = d$. Sin minùs convertetur in aliam Curvam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $\frac{a}{n}$ $x^{\frac{\theta - n}{n}} \times \overline{e + f x + g x x + \&c.}|^{\lambda - 1}$ per Corol. II. Prop. IX. Deinde, ſi de Dignitatum Indicibus $\frac{\theta - n}{n}$, & $\lambda - 1$, per Prop. VII., rejiciantur Unitates, donec Dignitates illæ fiant quàm-minimæ, devenietur ad Figuras ſimpliciſſimas, quæ hac ratione colligi poſſunt. Dein harum unaquæque, per Corol. V. Prop. IX. dat aliam, quæ nonnunquam ſimplicior eſt. Et ex his per Prop. III. & Coroll. IX. & X. Prop. IX. inter ſe collatis, Figuræ adhuc ſimpliciores quandoque prodeunt. Denique ex Figuris ſimpliciſſimis aſſumptis facto regreſſu computabitur Area quæſita.

CASUS III.

Sit Ordinata $z^{\theta - 1} \times \overline{a + b z^{n} + c z^{2n} + \&c.} \times \overline{e + f z^{n} + g z^{2n} + \&c.}|^{\lambda - 1}$, & hæc Figura, ſi quadrari poteſt, quadrabitur per Prop. V. Sin minus, diſtinguenda eſt Ordinata in partes $z^{\theta - 1} \times a \times \overline{e + f z^{n} + g z^{2n} + \&c.}|^{\lambda - 1}$, $z^{\theta - 1} \times b z^{n} \times \overline{e + f z^{n} + g z^{2n} + \&c.}|^{\lambda - 1}$, &c. &, per Caſ. II. inveniendæ ſunt Figuræ ſimpliciſſimæ, cum quibus Figuræ partibus illis reſpondentes comparari poſſunt. Nam, Areæ Figurarum partibus illis reſpondentium ſub ſignis ſuis + & — conjunctæ component Aream totam quæſitam.

CASUS

CASUS IV.

Sit Ordinata $z^{\theta - 1} \times \overline{a + bz^{n} + cz^{2n} + \&c.} \times \overline{e + fz^{n} + gz^{2n} + \&c.}|^{\lambda - 1} \times \overline{k + lz^{n} + mz^{2n} + \&c.}|^{\mu - 1}$: &, ſi Curva quadrari poteſt, quadrabitur per Prop. VI. Sin minus, convertetur in ſimpliciorem, per Corol. IV. Prop. IX. ac deinde comparabitur cum Figuris ſimpliciſſimis, per Prop. VIII. & Corol. VI, IX, & X Prop. IX., ut ſit in Caſu II, & III.

CASUS V.

Si Ordinata ex variis partibus conſtat, partes ſingulæ pro Ordinatis Curvarum totidem habendæ ſunt, & Curvæ illæ, quotquot quadrari poſſunt, ſigillatim quadrandæ ſunt, earúmque Ordinatæ de Ordinatâ totâ demendæ. Dein Curva, quam Ordinatæ pars reſidua deſignat ſeorſim, (ut in Caſu II, III, & IV.,) cum Figuris ſimpliciſſimis comparanda eſt, cum quibus comparari poteſt: Et Summa Arearum omnium pro Areâ Curvæ propoſitæ habenda eſt.

COROLL. I.

Hinc etiam Curva omnis, cujus Ordinata eſt Radix quadratica affecta Æquationis ſuæ, cum Figuris ſimpliciſſimis, ſeu rectilineis, ſeu curvilineis, comparari poteſt. Nam, Radix illa ex duabus partibus ſemper conſtat, quæ, ſeorſim ſpectatæ, non ſunt Æquationum Radices affectæ. Proponatur Æquatio $aayy + zzyy = 2a^{3}y + 2z^{3}y - z^{4}$, & extracta Radix erit $y = \frac{a^{3} + z^{3} + a\sqrt{a^{4} + 2az^{3} - z^{4}}}{aa + zz}$ cujus pars rationalis $\frac{a^{3} + z^{3}}{aa + zz}$, & pars irrationalis $\frac{a\sqrt{a^{4} + 2az^{3} - z^{4}}}{aa + zz}$ ſunt Ordinatæ Curvarum, quæ per hanc Propoſitionem vel quadrari poſſunt, vel cum Figuris ſimpliciſſimis comparari, cum quibus collationem geometricam admittunt.

COROLL.

Digitized by Google

Coroll. II.

Et Curva omnis, cujus Ordinata per Æquationem quamvis affectam definitur, quæ, per Corol. VII. Prop. IX., in Æquationem non affectam migrat, vel quadratur per hanc Propoſitionem, ſi quadrari poteſt, vel comparatur cum Figuris ſimpliciſſimis, cum quibus comparari poteſt. Et hac ratione Curva omnis quadratur, cujus Æquatio eſt trium Terminorum. Nam Æquatio illa, ſi affecta ſit, tranſmutatur in non affectam, per Corol. VII. Prop. IX., ac deinde per Corol. II., & V. Prop. IX., in ſimpliciſſimam migrando, dat vel Quadraturam Figuræ, ſi quadrari poteſt, vel Curvam ſimpliciſſimam, quâ cum comparatur.

Coroll. III.

Et Curva omnis, cujus Ordinata per Æquationem quamvis affectam definitur, quæ per Corol. VIII. Prop. IX. in Æquationem quadraticam affectam migrat, vel quadratur per hanc Propoſitionem, & hujus Corol. I., ſi quadrari poteſt, vel comparatur cum Figuris ſimpliciſſimis, cum quibus collationem geometricam admittit.

SCHOLIUM.

Ubi quadrandæ ſunt Figuræ, ad Regulas haſce generales ſemper recurrere nimis moleſtum eſſet: præſtat Figuras, quæ ſimpliciores ſunt & magis uſui eſſe poſſunt, ſemel quadrare, & Quadraturas in Tabulam referre; deinde Tabulam conſulere, quoties ejuſmodi Curvam aliquam quadrare oportet. Hujus autem generis ſunt Tabulæ duæ ſequentes, in quibus z denotat Abſciſſam, y Ordinatam rectangulam, & t Aream Curvæ quadrandæ, & d, e, f, g, h, n, ſunt Quantitates datæ cum ſignis ſuis $+$ & $-$.

TABULA

Digitized by Google

TABULA

Curvarum ſimpliciorum, quæ quadrari poſſunt.

	Curvarum Formæ.	Curvarum Areæ.
	Forma prima. $dz^{n-1}=y$	$\frac{d}{n}z^{n}=t$
	Forma ſecunda. $\frac{dz^{n-1}}{ee+2efz^{n}+ffz^{2n}}=y$	$\frac{dz^{n}}{nee+nefz^{n}}=t$, vel $\frac{-d}{nef+nffz^{n}}=t$.
	Forma tertia.	
1	$dz^{n-1}\sqrt{e+fz^{n}}=y$	$\frac{2d}{3nf}R^{3}=t$, exiſtente $R=\sqrt{e+f^{n}}$
2	$dz^{2n-1}\sqrt{e+fz^{n}}=y$	$\frac{-4e+6fz^{n}}{15nff}dR^{3}=t$
3	$dz^{3n-1}\sqrt{e+fz^{n}}=y$	$\frac{16ee-24efz^{n}+30ffz^{2n}}{105nf^{3}}dR^{3}=t$
4	$dz^{4n-1}\sqrt{e+fz^{n}}=y$	$\frac{-96e^{3}+144eefz^{n}-180effz^{2n}+210f^{3}z^{3n}}{945nf^{4}}dR^{3}=t$
	Forma quarta.	
1	$\frac{dz^{n-1}}{\sqrt{e+fz^{n}}}=y$	$\frac{2d}{nf}R=t$
2	$\frac{dz^{2n-1}}{\sqrt{e+fz^{n}}}=y$	$\frac{-4e+2fz^{n}}{3nff}dR=t$
3	$\frac{dz^{3n-1}}{\sqrt{e+fz^{n}}}=y$	$\frac{16ee-8efz^{n}+6ffz^{2n}}{15nf^{3}}dR=t$
4	$\frac{dz^{4n-1}}{\sqrt{e+fz^{n}}}=y$	$\frac{-96e^{3}+48eefz^{n}-36effz^{2n}+30f^{3}z^{3n}}{105nf^{4}}dR=t$

Digitized by Google

TABULA

Curvarum ſimpliciorum quæ cum Ellipſi & Hyperbola comparari poſſunt.

Sit jam (*Fig.* 4. 5. 6. 7.) aGD, vel PGD, vel GDS, Sectio conica, cujus Area ad Quadraturam Curvæ propoſitæ requiritur, ſitque ejus Centrum A; Axis Ka; Vertex a; Semiaxis conjugatus AP; datum Abſtiſſæ principium A, vel a, vel α; Abſciſſa AB, vel aB, vel $\alpha B = x$; Ordinata rectangula $BD = u$; & Area $ABDP$, vel $aBDG$, vel $\alpha BDG = s$; exiſtente αG Ordinatâ ad Punctum α. Jungantur KD, AD, aD. Ducatur Tangens DT occurrens Abſciſſæ AB in T, & compleatur Parallelogrammum $ABDO$. Et, ſi quando ad Quadraturam Curvæ propoſitæ requiruntur Areæ duarum Sectionum conicarum, dicatur poſterioris Abſciſſa ξ, Ordinata τ, & Area σ. Sit autem $\div$ differentia duarum Quantitatum, ubi incertum eſt utrum poſterior de priori, an prior de poſteriori ſubduci debeat.

CURVA-

Digitized by Google

Curvarum Formæ.		Sectionis Conicæ.		Curvarum Areæ.
	Forma prima.	*Abſciſſa.*	*Ordinata.*	
Fig. 5. 1	$\frac{dz^{n-1}}{e+fz^{n}}=y$	$z^{n}=x$	$\frac{d}{e+fx}=u$	$\frac{1}{n}s=t=\frac{\alpha GDB}{n}$
2	$\frac{dz^{2n-1}}{e+fz^{n}}=y$	$z^{n}=x$	$\frac{d}{e+fx}=u$	$\frac{d}{nf}z^{n}-\frac{e}{nf}s=t$
3	$\frac{dz^{3n-1}}{e+fz^{n}}=y$	$z^{n}=x$	$\frac{d}{e+fx}=u$	$\frac{d}{2nf}z^{2n}-\frac{de}{nff}z^{n}+\frac{ee}{nff}s=t$
	Forma ſecunda.			
Fig. 6. 1 7.	$\frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^{n}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^{n}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{f}-\frac{e}{f}xx}=u$	$\frac{2xu\div 4s}{n}=t=\frac{4}{n}ADGa$
2	$\frac{dz^{\frac{3}{2}n-1}}{e+fz^{n}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^{n}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{f}-\frac{e}{f}xx}=u$	$\frac{2de}{nf}z^{\frac{n}{2}}+\frac{4es-2exu}{nf}=t$
3	$\frac{dz^{\frac{5}{2}n-1}}{e+fz^{n}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^{n}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{f}-\frac{e}{f}xx}=u$	$\frac{2de}{3nf}z^{\frac{3n}{2}}-\frac{2dee}{nff}z^{\frac{n}{2}}+\frac{2eexu-4ees}{nff}=t$

Forma tertia

	Forma tertia.			
G.5. 1 6. 7.	$\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^{n}}=y$	$\frac{1}{z^{n}}=xx$	$\sqrt{f+exx}=u$	$\frac{4de}{nf}$ in $\frac{V^{3}}{2ex}-s=t=\frac{4de}{nf}$ in $aGDT$, vel in $APDB \div TDB$
	Vel ſic	$\frac{1}{z^{n}}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{8dee}{nff}$ in $s-\frac{1}{2}xu-\frac{fu}{4e}+\frac{ffu}{4eex}=t=\frac{8dee}{nff}$ in $aGDA+\frac{ffu}{4eex}$
2	$\frac{d}{z^{n+1}}\sqrt{e+fz^{n}}=y$	$\frac{1}{z^{n}}=xx$	$\sqrt{f+exx}=u$	$-\frac{d}{n}s=t=\frac{2d}{n}APDB$, ſeu $\frac{2d}{n}aGDB$
	Vel ſic	$\frac{1}{z^{n}}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{4de}{nf}$ in $s-\frac{1}{2}xu-\frac{fu}{2e}=t=\frac{4de}{nf}\times aGDK$
3	$\frac{d}{z^{2n+1}}\sqrt{e+fz^{n}}=y$	$\frac{1}{z^{n}}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$-\frac{d}{n}s=t=\frac{d}{n}\times -aGDE$, vel $BDPK$
4	$\frac{d}{z^{3n+1}}\sqrt{e+fz^{n}}=y$	$\frac{1}{z^{n}}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{3dfs-2du^{3}}{6ne}=t$
	Forma quarta.			
.5. 1	$\frac{d}{z\sqrt{e+fz^{n}}}=y$	$\frac{1}{z^{n}}=xx$	$\sqrt{f+exx}=u$	$\frac{4d}{nf}$ in $\frac{1}{2}xu \div s=t=\frac{4d}{nf}$ in PAD, vel in $aGDA$
	Vel ſic	$\frac{1}{z^{n}}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{8de}{nff}$ in $s-\frac{1}{2}xu-\frac{fu}{4e}=t=\frac{8de}{nff}$ in $aGDA$
2	$\frac{d}{z^{n+1}\sqrt{e+fz^{n}}}=y$	$\frac{1}{z^{n}}=xx$	$\sqrt{f+exx}=u$	$\frac{2d}{ne}$ in $s-xu=t=\frac{2d}{ne}$ in POD, vel in $AODGa$
	Vel ſic	$\frac{1}{z^{n}}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{4d}{nf}$ in $\frac{1}{2}xu \div s=t=\frac{4d}{nf}$ in $aDGa$

3	$\frac{d}{z^{2n+1}\sqrt{e+fz^n}}=y$	$\frac{1}{z^n}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{d}{ne}$ in $3s \div 2xu = t = \frac{d}{ne}$ in $3aDGa \div \Delta aDB$
4	$\frac{d}{z^{3n+1}\sqrt{e+fz^n}}=y$	$\frac{1}{z^n}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{10dfxu-15dfs-2dexxu}{6nee}=t$
	Forma quinta.			
1	$\frac{dz^{n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}}=y$ Vel sic	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^n+gz^{2n}}}=x$ $\sqrt{\frac{dz^{2n}}{e+fz^n+gz^{2n}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{g}+\frac{ff-4eg}{4gg}xx}=u$ $\sqrt{\frac{d}{e}+\frac{ff-4eg}{4ee}xx}=u$	$\frac{xu-2s}{n}=t$ $\frac{2s-xu}{n}=t$
2	$\frac{dz^{2n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}}=y$	$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\frac{d}{e+fz^n+gz^{2n}}}=x\\ fz^n+gz^{2n}=\xi\end{array}\right.$	$\sqrt{\frac{d}{g}+\frac{ff-4eg}{4gg}xx}=u$ $\frac{1}{e+\xi}=\Upsilon$	$\left.\right\}\frac{d\sigma+2fs-fxu}{2ng}=t$
	Forma sexta, ubi ſcribitur p. pro $\sqrt{ff+4eg}$.			
1	$\frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}}=y$	$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\frac{2dp}{f-p+2gz^n}}=x\\ \sqrt{\frac{2dp}{f+p+2gz^n}}=\xi\end{array}\right.$	$\sqrt{d+\frac{-f+p}{2g}xx}=u$ $\sqrt{d+\frac{-f-p}{2g}\xi\xi}=\Upsilon$	$\left.\right\}\frac{2xu-4s-2\xi\Upsilon+4\sigma}{np}=t$
2	$\frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}}=y$	$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\frac{2dez^n}{fz^n-pz^n+2e}}=x\\ \sqrt{\frac{2dez^n}{fz^n+pz^n+2e}}=\xi\end{array}\right.$	$\sqrt{d+\frac{-f-p}{2e}xx}=u$ $\sqrt{d+\frac{-f-p}{2e}\xi\xi}=\Upsilon$	$\left.\right\}\frac{4s-2xu-4\sigma+2\xi\Upsilon}{np}=t$

	Forma ſeptima			
FIG. 5. 1 6.	$\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}=y$	$\left\{\begin{matrix} z^{n}=x \\ \frac{1}{z^{n}}=\xi \end{matrix}\right.$	$\left.\begin{matrix} \sqrt{e+fx+gxx}=u \\ \sqrt{g+f\xi+e\xi\xi}=\Upsilon \end{matrix}\right\}$	$\frac{4dee\xi\Upsilon+2def\Upsilon-2dffu-8dee\sigma+4dfgs}{4neg-nff}=t$
2	$dz^{n-1}\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}=y$	$z^{n}=x$	$\sqrt{e+fx+gxx}=u$	$\frac{d}{n}s=t=\frac{d}{n}$ in $aGDB$
3	$dz^{2n-1}\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}=y$	$z^{n}=x$	$\sqrt{e+fx+gxx}=u$	$\frac{d}{3ng}u^{3}-\frac{df}{2ng}s=t$
4	$dz^{3n-1}\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}=y$	$z^{n}=x$	$\sqrt{e+fx+gxx}=u$	$\frac{5dgx-5df}{24ngg}u^{3}+\frac{5dff-4deg}{16ngg}s=t$
	Forma octava.			
FIG. 5. 1	$\frac{dz^{n-1}}{\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}}=y$	$z^{n}=x$	$\sqrt{e+fx+gxx}=u$	$\frac{8dgs-4dgxu-2dfu}{4neg-nff}=t=\frac{8dg}{4neg-nff}$ in $aGDB\pm\Delta DBA$
2	$\frac{dz^{2n-1}}{\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}}=y$	$z^{n}=x$	$\sqrt{e+fx+gxx}=u$	$\frac{-4dfs+2dfxu+4deu}{4neg-nff}=t$
3	$\frac{dz^{3n-1}}{\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}}=y$	$z^{n}=x$	$\sqrt{e+fx+gxx}=u$	$\frac{\begin{matrix}3dff \\ -4deg\end{matrix}s\begin{matrix}-2dff \\ +4deg\end{matrix}xu-2defu}{4negg-nffg}=t$
4	$\frac{dz^{4n-1}}{\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}}=y$	$z^{n}=x$	$\sqrt{e+fx+gxx}=u$	$\frac{\begin{matrix}36defg \\ -15deff\end{matrix}s\begin{matrix}+8degg \\ -2dffg\end{matrix}xxu\begin{matrix}-28defg \\ +10deff\end{matrix}xu\begin{matrix}+10deeg \\ -16deef\end{matrix}u}{24neg^{3}-6nffg}=t$

	Forma nona.			
1	$\frac{dz^{n-1}\sqrt{e+fz^n}}{g+bz^n}=y$	$\sqrt{\frac{d}{g+bz^n}}=x$	$\sqrt{\frac{df}{b}+\frac{eb-fg}{b}xx}=u$	$\frac{\begin{smallmatrix}4fg\\-4eb\end{smallmatrix}s\begin{smallmatrix}-2fg\\+2eb\end{smallmatrix}xu+\frac{2dfu}{x}}{nfb}=t$
2	$\frac{dz^{2n-1}\sqrt{e+fz^n}}{g+bz^n}=y$	$\sqrt{\frac{d}{g+bz^n}}=x$	$\sqrt{\frac{df}{b}+\frac{eb-fg}{b}xx}=u$	$\frac{\begin{smallmatrix}4egb\\-4fgg\end{smallmatrix}s\begin{smallmatrix}-2egb\\+2fgg\end{smallmatrix}xu+\frac{2}{3}db\frac{u^3}{x^3}-2dfg\frac{u}{x}}{nfbb}=t$
	Forma decima.			
FIG. 5. 6. 1	$\frac{dz^{n-1}}{g+bz^n\sqrt{e+fz^n}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{g+bz^n}}=x$	$\sqrt{\frac{df}{b}+\frac{eb-fg}{b}xx}=u$	$\frac{2xu-4s}{nf}=t=\frac{4}{nf}ADGa$
2	$\frac{dz^{2n-1}}{g+bz^n\sqrt{e+fz^n}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{g+bz^n}}=x$	$\sqrt{\frac{df}{b}+\frac{eb-fg}{b}xx}=u$	$\frac{2gs-2gxu+\frac{2du}{x}}{nfb}=t$
	Forma undecima.			
1	$dz^{-1}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+bz^n}}=y$	$\sqrt{g+bz^n}=x$ $\sqrt{b+gz^{-n}}=\xi$	$\sqrt{\frac{eb-fg}{b}+\frac{f}{b}xx}=u$ $\sqrt{\frac{fg-eb}{g}+\frac{e}{g}\xi\xi}=\Upsilon$	$\frac{dxu^3z^{-n}-4dfs-4de\sigma}{nfg-neb}=t$
2	$dz^{n-1}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+bz^n}}=y$	$\sqrt{g+bz^n}=x$	$\sqrt{\frac{eb-fg}{b}+\frac{f}{b}xx}=u$	$\frac{2d}{nb}s=t$
3	$dz^{2n-1}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+bz^n}}=y$	$\sqrt{g+bz^n}=x$	$\sqrt{\frac{eb-fg}{b}+\frac{f}{b}xx}=u$	$\frac{dbxu^3\begin{smallmatrix}-3dfg\\-deb\end{smallmatrix}s}{2nfbb}=t$

In Tabulis hiſce, Series Curvarum cujuſque Formæ utrinque in infinitum continuari poteſt, Scilicet in Tabulâ primâ, in Numeratoribus Arearum Formæ tertiæ & quartæ, Numeri coefficientes initialium Terminorum (2, — 4, 16, — 96, 768, &c.) generantur multiplicando Numeros — 2, — 4, — 6, — 8, *&c.* in ſe continuò, & ſubſequentium Terminorum Coefficientes ex initialibus derivantur multiplicando ipſos gradatim, in Formâ quidem tertiâ, per $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{4}$, $-\frac{7}{6}$, $-\frac{9}{8}$, $-\frac{11}{10}$, *&c.*, in quartâ verò per $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{6}$, $-\frac{7}{8}$, $-\frac{9}{10}$, *&c.* Et Denominatorum Coefficientes 3, 15, 105, *&c.* prodeunt multiplicando Numeros 1, 3, 5, 7, 9, *&c.* in ſe continuò.

In ſecundâ verò Tabulâ, Series Curvarum Formæ primæ, ſecundæ, quintæ, ſextæ, nonæ, & decimæ ope ſolius Diviſionis, & Formæ reliquæ ope Propoſitionis tertiæ, & quartæ, utrinque producuntur in infinitum.

Quin-etiam hæ Series mutando ſignum numeri n variari ſolent. Sic enim *ex. gr.* Curva $\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^{n}}=y$, evadit $\frac{d}{z^{\frac{1}{2}n+1}}\sqrt{f+ez^{n}}$.

PROPOSITIO XI.

Theor. VIII.

TAB. I. Sit (*Fig.* 8.) $ADIC$ Curva quævis Abſciſſam habens $AB=z$, & Ordinatam $BD=y$; & ſit $AEKC$ Curva alia, cujus Ordinata BE æqualis eſt prioris Areæ ADB ad Unitatem applicatæ; & $AFLC$ Curva tertia, cujus Ordinata BF æqualis eſt ſecundæ Areæ AEB ad Unitatem applicatæ; & $AGMC$ Curva quarta, cujus Ordinata BG æqualis eſt tertiæ Areæ AFB ad Unitatem applicatæ; & $AHNC$ Curva quinta, cujus Ordinata BH æqualis eſt quartæ Areæ AGB ad Unitatem applicatæ; & ſic deinceps in infinitum. Et ſunto $A, B, C, D, E,$ *&c.* Areæ Curvarum Ordinatas

Digitized by Google

natas habentium y, zy, z^2y, z^3y, z^4y, & Abſciſſam communem z.

Detur Abſciſſa quævis $AC = t$, ſitque $BC = t - z = x$; & ſunto P, Q, R, S, T Areæ Curvarum Ordinatas habentium x, xy, x^2y, x^3y, x^4y, & Abſciſſam communem x.

Terminentur autem hæ Areæ omnes ad Abſciſſam totam datam AC, nec non ad Ordinatam poſitione datam & infinitè productam CI: Et erit Arearum ſub initio poſitarum prima $ADIC = A = P$; ſecunda $AEKC = tA - B = Q$; tertia $AFLC = \frac{ttA - 2tB + C}{2} = \frac{1}{2}R$; quarta $AGMC = \frac{t^3A - 3ttB + 3tC - D}{6} = \frac{1}{6}S$; quinta $AHNC = \frac{t^4A - 4t^3B + 6ttC - 4tD + E}{24} = \frac{1}{24}T$.

COROLLARIUM.

Unde, ſi Curvæ, quarum Ordinatæ ſunt y, zy, z^2y, z^3y, *&c.* vel y, xy, x^2y, x^3y, *&c.* quadrari poſſunt, quadrabuntur etiam Curvæ $ADIC$, $AEKC$, $AFLC$, $AGMC$, *&c.* Et habebuntur Ordinatæ BE, BF, BG, BH Areis Curvarum proportionales.

SCHOLIUM.

Quantitatum fluentium Fluxiones eſſe primas, ſecundas, tertias, quartas, aliáſque diximus ſupra. Hæ Fluxiones ſunt ut Termini Serierum infinitarum convergentium. Ut ſi z^n ſit Quantitas fluens, & fluendo evadat $\overline{z+o}^{\,n}$, deinde reſolvatur in Seriem convergentem $z^n + noz^{n-1} + \frac{nn-n}{2}ooz^{n-2} + \frac{n^3-3nn+2n}{6}o^3z^{n-3} + \&c.$, Terminus primus hujus Seriei z^n erit Quantitas illa fluens; ſecundus noz^{n-1} erit ejus Incrementum primum, ſeu Differentia prima, cui naſcenti proportionalis eſt ejus Fluxio

prima;

prima; tertius $\frac{nn - n}{2} ooz^{n-2}$, erit ejus Incrementum ſecundum, ſeu Differentia ſecunda, cui naſcenti proportionalis eſt ejus Fluxio ſecunda; quartus $\frac{n^3 - 3nn + 2n}{6} o^3 z^{n-3}$, erit ejus Incrementum tertium, ſeu Differentia tertia, cui naſcenti Fluxio tertia proportionalis eſt, & ſic deinceps in infinitum.

Exponi autem poſſunt hæ Fluxiones per Curvarum Ordinatas BD, BE, BF, BG, BH, *&c.* ut, ſi Ordinata BE, $(= \frac{ADB}{1})$ ſit Quantitas fluens, erit ejus Fluxio prima ut Ordinata BD. Si BF $(= \frac{AEB}{1})$ ſit Quantitas fluens, erit ejus Fluxio prima ut Ordinata BE, & Fluxio ſecunda ut Ordinata BD. Si BH $(= \frac{AGB}{1})$ ſit Quantitas fluens, erunt ejus Fluxiones, prima, ſecunda, tertia, & quarta, ut Ordinatæ BG, BF, BE, BD, reſpectivè.

Et hinc in Æquationibus, quæ Quantitates tantùm duas incognitas involvunt, quarum una eſt Quantitas uniformiter fluens, & altera eſt Fluxio quælibet Quantitatis alterius fluentis, inveniri poteſt fluens illa altera per Quadraturam Curvarum. Exponatur enim Fluxio ejus per Ordinatam BD, & ſi hæc ſit Fluxio prima, quæratur Area $ADB = BE \times 1$; ſi Fluxio ſecunda, quæratur Area $AEB = BF \times 1$; ſi Fluxio tertia, quæratur Area $AFB = BG \times 1$, *&c.* Et Area inventa erit Exponens Fluentis quæſitæ.

Sed & in Æquationibus, quæ Fluentem & ejus Fluxionem primam ſine alterâ Fluente, vel duas ejuſdem Fluentis Fluxiones, primam & ſecundam, vel ſecundam & tertiam, vel tertiam & quartam, *&c.* ſine alterutrâ Fluente involvunt, inveniri poſſunt Fluentes per Quadraturam Curvarum. Sit Æquatio $aa\dot{u} = au + uu$, exiſtente $u = BE$, $\dot{u} = BD$, $z = AB$, & $\dot{z} = 1$, & Æquatio illa, complendo Dimenſiones Fluxionum, evadit $aa\dot{u} = au\dot{z} + uu\dot{z}$, ſeu $\frac{aa\dot{u}}{au + uu} = \dot{z}$. Jam fluat u uniformiter,

&c.

& ſit ejus fluxio $\dot{u} = 1$, & erit $\frac{aa}{au + uu} = \dot{z}$; &, quadrando Curvam cujus Ordinata eſt $\frac{aa}{au + uu}$ & Abſciſſa u, habebitur Fluens $\dot{z}$. Adhuc ſit Æquatio $aa\ddot{u} = a\dot{u} + \dot{u}\dot{u}$, exiſtente $u = BF$, $\dot{u} = BE$, $\ddot{u} = BD$, & $z = AB$; &, per Relationem inter $\ddot{u}$ & $\dot{u}$, ſeu BD, & BE, invenietur Relatio inter AB, & BE ut in Exemplo ſuperiore. Deinde, per hanc Relationem, invenietur Relatio inter AB, & BF, quadrando Curvam AEB.

Æquationes, quæ tres incognitas Quantitates involvunt, aliquando reduci poſſunt ad Æquationes, quæ duas tantùm involvunt, & in his Caſibus Fluentes invenientur ex Fluxionibus, ut ſuprà.

Sit Æquatio $a - bx^{m} = cxy^{n}\dot{y} + dy^{2n}\dot{y}\dot{y}$. Ponatur $y^{n}\dot{y} = \dot{u}$, & erit $a - bx^{m} = cx\dot{u} + d\dot{u}\dot{u}$: hæc Æquatio, quadrando Curvam cujus Abſciſſa eſt x & Ordinata $\dot{u}$, dat Aream u, & Æquatio altera $y^{n}\dot{y} = \dot{u}$, regrediendo ad Fluentes, dat $\frac{1}{n+1}y^{n+1} = u$. Unde habetur Fluens y.

Quin etiam in Æquationibus, quæ tres incognitas involvunt, & ad Æquationes, quæ duas tantùm involvunt, reduci non poſſunt, Fluentes quandoque prodeunt per Quadraturam Curvarum.

Sit Æquatio $\overline{ax^{m} + bx^{n}}|^{p} = rex^{r-1}y^{s} + sex^{r}\dot{y}y^{s-1} - f\dot{y}y^{t}$, exiſtente $\dot{x} = 1$. Et pars poſterior $rex^{r-1}y^{s} + sex^{r}\dot{y}y^{s-1} - f\dot{y}y^{t}$, regrediendo ad Fluentes, fit $ex^{r}y^{s} - \frac{f}{t+1}y^{t+1}$, quæ proinde eſt ut Area Curvæ, cujus Abſciſſa eſt x & Ordinata $\overline{ax^{m} + bx^{n}}|^{p}$, & inde datur Fluens y.

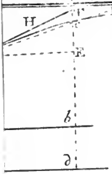
Sit Æquatio $\dot{x} \times \overline{ax^m+bx^n}|^p = \frac{d\dot{y}y^{n-1}}{\sqrt{e+fy^n}}$. Et Fluens, cujus Fluxio eſt $\dot{x} \times \overline{ax^m+bx^n}|^p$ erit ut Area Curvæ, cujus Abſciſſa eſt x & Ordinata eſt $\overline{ax^m+bx^n}|^p$. Item, Fluens, cujus Fluxio eſt $\frac{d\dot{y}y^{n-1}}{\sqrt{e+fy^n}}$ erit ut Area Curvæ, cujus Abſciſſa eſt y & Ordinata $\frac{d\dot{y}y^{n-1}}{\sqrt{e+fy^n}}$, id eſt, (per Caſum primum Formæ quartæ Tabulæ I.) ut Area $\frac{2d}{nf}\sqrt{e+fy^n}$. Pone ergo $\frac{2d}{nf}\sqrt{e+fy^n}$ æqualem Areæ Curvæ, cujus Abciſſa eſt x & Ordinata $\overline{ax^m+bx^n}|^p$, & habebitur Fluens y.

Et nota, quòd Fluens omnis, quæ ex Fluxione primâ colligitur, augeri poteſt vel minui Quantitate quâvis non Fluente. Quæ ex Fluxione ſecundâ colligitur, augeri poteſt, vel minui Quantitate quâvis, cujus Fluxio ſecunda nulla eſt. Quæ ex Fluxione tertiâ colligitur, augeri poteſt vel minui Quantitate quâvis, cujus Fluxio tertia nulla eſt; & ſic deinceps in infinitum.

Poſtquàm verò Fluentes ex Fluxionibus collectæ ſunt, ſi de veritate concluſionis dubitatur, Fluxiones Fluentium inventarum viciſſim colligendæ ſunt & cum Fluxionibus ſub initio propoſitis comparandæ. Nam, ſi prodeunt æquales, concluſio rectè ſe habet: ſin minus, corrigendæ ſunt Fluentes ſic, ut earum Fluxiones Fluxionibus ſub initio propoſitis æquentur. Nam, & Fluens pro lubitu aſſumi poteſt, & aſſumptio corrigi, ponendo Fluxionem Fluentis aſſumptæ æqualem Fluxioni propoſitæ, & Terminos homologos inter ſe comparando.

Et his principiis via ad majora ſternitur.

OPUS-



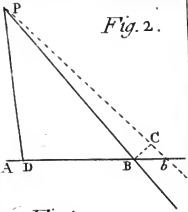


Fig. 2.

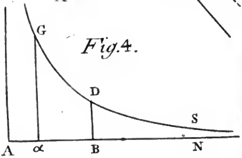
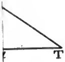


Fig. 4.





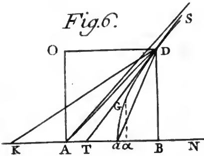
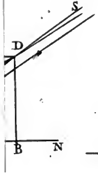


Fig. 6.



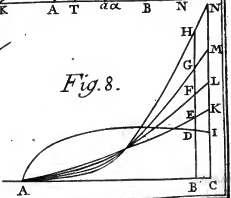


Fig. 8.

Digitized by Google

OPUSCULUM IV.

ISAACI NEWTONI

ENUMERATIO

LINEARUM

TERTII ORDINIS.

Edita LONDINI 1706.

Digitized by Google

Digitized by Google

ISAACI

NEWTONI

ENUMERATIO

LINEARUM

TERTII ORDINIS.

I.

Linearum Ordines.

LINEÆ Geometricæ ſecundùm numerum Dimenſionum Æquationis, quâ Relatio inter Ordinatas & Abſciſſas definitur, vel (quod perinde eſt) ſecundùm numerum Punctorum, in quibus à Lineâ rectâ ſecari poſſunt, optimè diſtinguntur in ordines. Quâ ratione Linea primi Ordinis erit Recta ſola; eæ ſecundi ſive quadratici Ordinis erunt Sectiones conicæ & Circulus; & eæ tertii ſive cubici Ordinis Parabola cubica, Parabola *Neiliana*,

Digitized by Google

liana, Ciſſois Veterum, & reliquæ, quas hîc enumerare ſuſcepimus. Curva autem primi Generis, (ſiquidem Recta inter Curvas non eſt numeranda,) eadem eſt cum Lineâ ſecundi Ordinis; & Curva ſecundi Generis eadem cum Lineâ Ordinis tertii. Et Linea Ordinis infiniteſimi ea eſt, quam Recta in Punctis infinitis ſecare poteſt, qualis eſt Spiralis, Cyclois, Quadratrix, & Linea omnis, quæ per Radii vel Rotæ revolutiones infinitas generatur.

II.

Proprietates Sectionum conicarum competunt Curvis ſuperiorum Generum.

Sectionum conicarum proprietates præcipuæ à Geometris paſſim traduntur. Et conſimiles ſunt proprietates Curvarum ſecundi Generis, & reliquarum, ut ex ſequenti proprietatum præcipuarum enumeratione conſtabit.

1. *De Curvarum ſecundi Generis Ordinatis, Diametris, Verticibus, Centris, Axibus.*

Si Rectæ plures parallelæ, & ad conicam Sectionem utrinque terminatæ ducantur, Recta duas earum biſecans biſecabit alias omnes, ideòque dicitur *Diameter* Figuræ; & Rectæ biſectæ dicuntur *Ordinatim applicatæ* ad Diametrum; & concurſus omnium Diametrorum eſt *Centrum* Figuræ; & interſectio Curvæ & Diametri *Vertex* nominatur; & Diameter illa *Axis* eſt, cui Ordinatim applicatæ inſiſtunt ad Angulos rectos. Et ad eundem modum in Curvis ſecundi Generis, ſi Rectæ duæ quævis parallelæ ducantur occurrentes Curvæ in tribus Punctis: Recta, quæ ita ſecat has parallelas, ut ſumma duarum partium ex uno ſecantis Latere ad Curvam terminatarum æquetur parti tertiæ ex altero Latere ad Curvam terminatæ, eodem modo ſecabit omnes alias his parallelas, Curvæque in tribus Punctis occurrentes Rectas, hoc eſt, ita ut ſumma partium duarum ex uno ipſius Latere ſemper æquetur parti tertiæ ex altero Latere. Has itaque tres partes, quæ hinc inde æquantur, *Ordinatim applicatas*;

applicatas; & Rectam ſecantem, cui Ordinatim applicantur, *Diametrum*; & interſectionem Diametri, & Curvæ, *Verticem*; & concurſum duarum Diametrorum *Centrum* nominare licet. Diameter autem ad Ordinatas rectangula, ſi modò aliqua ſit, etiam *Axis* dici poteſt; & ubi omnes Diametri in eodem Puncto concurrunt, iſtud erit *Centrum generale*.

2. *De Aſymptotis, & earum proprietatibus.*

Hyperbola primi generis duas *Aſymptotos*, ea ſecundi tres, ea tertii quatuor, & non plures habere poteſt, & ſic in reliquis. Et quemadmodum partes Lineæ cujuſvis rectæ inter Hyperbolam conicam & duas ejus Aſymptotos ſunt hinc inde æquales: ſic, in Hyperbolis ſecundi Generis, ſi ducatur Recta quævis ſecans tàm Curvam, quàm tres ejus Aſymptotos in tribus Punctis, ſumma duarum partium iſtius Rectæ, quæ à duobus quibuſvis Aſymptotis in eandem plagam ad duo Puncta Curvæ extenduntur, æqualis erit parti tertiæ, quæ à tertiâ Aſymptoto in plagam contrariam ad tertium Curvæ Punctum extenditur.

3. *De Lateribus rectis & tranſverſis.*

Et, quemadmodum in conicis Sectionibus non Parabolicis Quadratum Ordinatim applicatæ, hoc eſt, Rectangulum Ordinatarum, quæ ad contrarias partes Diametri ducuntur, eſt ad Rectangulum partium Diametri, quæ ad Vertices Ellipſeos, vel Hyperbolæ terminantur, ut data quædam Linea, quæ dicitur *Latus rectum*, ad partem Diametri, quæ inter Vertices jacet & dicitur *Latus tranſverſum*: ſic in Curvis non Parabolicis ſecundi Generis Parallelepipedum ſub tribus Ordinatim applicatis eſt ad Parallelepipedum ſub partibus Diametri ad Ordinatas & tres Vertices Figuræ abſciſſis, in Ratione quadam datâ: in quâ Ratione ſi ſumantur tres Rectæ ad tres partes Diametri inter Vertices Figuræ ſitas, ſingulæ ad ſingulas, tunc illæ tres Rectæ dici poſſunt *Latera recta* Figuræ; & illæ partes Diametri inter Vertices *Latera tranſverſa*. Et, ſicut in Parabolâ conicâ, quæ ad unam & eandem Diametrum unicum tantùm

habet Verticem, Rectangulum ſub Ordinatis æquatur Rectangulo ſub parte Diametri, quæ ad Ordinatas, & Verticem abſcinditur & Rectâ quadam datâ, quæ *Latus rectum* dicitur: ſic in Curvis ſecundi Generis, quæ non-niſi duos habent Vertices ad eandem Diametrum, Parallelepipedum ſub Ordinatis tribus æquatur Parallelepipedo ſub duabus partibus Diametri ad Ordinatas & Vertices illos duos abſciſſis, & Rectâ quâdam datâ, quæ proinde *Latus rectum* dici poteſt.

4. *De Ratione contentorum ſub Parallelarum ſegmentis.*

Denique, ſicut in conicis Sectionibus, ubi duæ parallelæ, ad Curvam utrinque terminatæ, ſecantur à duabus parallelis ad Curvam utrinque terminatis, prima à tertiâ, & ſecunda â quartâ, Rectangulum partium primæ eſt ad Rectangulum partium tertiæ, ut Rectangulum partium ſecundæ ad Rectangulum partium quartæ: ſic, ubi quatuor tales Rectæ occurrnnt Curvæ ſecundi Generis, ſingulæ in tribus Punctis, Parallelepipedum partium primæ Rectæ erit ad Parallelepipedum partium tertiæ, ut Parallelepipedum partium ſecundæ ad Parallelepipedum partium quartæ.

5. *De Cruribus Hyperbolicis, & Parabolicis, & eorum plagis.*

Curvarum ſecundi, & ſuperiorum Generum, æquè atque primi, crura omnia in infinitum progredientia, vel *Hyperbolici* ſunt generis, vel *Parabolici.* Crus *Hyperbolicum* voco, quod ad Aſymptoton aliquam in infinitum appropinquat; *Parabolicum* quod Aſymptoto deſtituitur. Hæc crura ex Tangentibus optimè dignoſcuntur. Nam, ſi Punctum contactûs in infinitum abeat, Tangens cruris Hyperbolici cum Aſymptoto coincidet, & Tangens cruris Parabolici in infinitum recedet, evaneſcet, & nullibi reperietur. Invenitur igitur Aſymptotos cruris cujuſvis quærendo Tangentem cruris illius ad Punctum infinitè diſtans. Plaga autem cruris infiniti invenitur quærendo poſitionem Rectæ cujuſvis, quæ Tangenti parallela eſt ubi Punctum contactûs in infinitum abit. Nam hæc Recta in eandem plagam cum crure infinito dirigitur.

III. Re-

III.

Reductio Curvarum omnium Generis ſecundi ad Æquationum caſus quatuor.

Lineæ omnes Ordinis primi, tertii, quinti, ſeptimi, & imparis cujuſque, duo habent, ad minimum, crura in infinitum verſùs plagas oppoſitas progredientia. Et Lineæ omnes tertii Ordinis duo habent ejuſmodi crura in plagas oppoſitas progredientia, in quas nulla alia earum crura infinita (præterquam in Parabolâ *Carteſianâ*) tendunt.

CAS. I.

Si crura illa ſint Hyperbolici Generis, ſit (*Fig.* 1.) GAS eorum Aſymptotos, & huic parallela agatur Recta quævis CBc ad Curvam utrinque, (ſi fieri poteſt,) terminata, eadémque biſecetur in Puncto X, & locus Puncti illius X erit Hyperbola conica, (puta $X\phi$,) cujus una Aſymptotos eſt AG. Sit ejus altera Aſymptotos AB, & Æquatio, quâ Relatio inter Ordinatam BC, & Abſciſſam AB definitur, ſi AB dicatur x, & BC y, ſemper induet hanc formam $xyy + ey = ax^3 + bxx + cx + d$. Ubi Termini, e, a, b, c, d, deſignant Quantitates datas ſignis ſuis $+$, & $-$ affectas, quarum quælibet deeſſe poſſunt, modò ex earum defectu Figura in Sectionem conicam non vertatur. Poteſt autem Hyperbola illa conica cum Aſymptotis ſuis coincidere, id eſt Punctum X in Rectâ AB locari: & tunc Terminus $+ey$ deeſt. TAB. I.

CAS. II.

At ſi (*Fig.* 2.) Recta illa CBc non poteſt utrinque ad Curvam terminari, ſed Curvæ in unico tantùm Puncto occurrit: age quamvis Poſitione datam Rectam AB Aſymptoto AS occurrentem in A, ut & aliam quamvis BC Aſymptoto illi parallelam, Curvæque occurrentem in Puncto C, & Æquatio, quâ Relatio inter Ordinatam BC & Abſciſſam AB definitur, ſemper induet hanc formam, TAB. I.

$$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

CAS. III.

Quòd ſi crura illa oppoſita Parabolici ſint Generis, Recta (*Fig.* 3.) CBc ad Curvam utrinque, ſi fieri poteſt, terminata in plagam crurum ducatur, & biſecetur in B, & locus Puncti B erit Linea recta. Sit iſta AB, terminata ad datum quodvis Punctum A, & Æquatio, quâ Relatio inter Ordinatam BC & Abſciſſam AB definitur, ſemper induet hanc formam,

$$yy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

CAS. IV.

TAB. I. At verò ſi (*Fig.* 4.) Recta illa CBc in unico tantùm Puncto occurrat Curvæ, ideóque ad Curvam utrinque terminari non poſſit; ſit Punctum illud C, & incidat Recta illa ad Punctum B in Rectam quamvis aliam, Poſitione datam, & ad datum quodvis Punctum A terminatam, AB: & Æquatio, quâ Relatio inter Ordinatam BC & Abſciſſam AC definitur, ſemper induet hanc formam,

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Nomina formarum.

Enumerando Curvas horum Caſuum, Hyperbolam vocabimus, *Inſcriptam*, quæ tota jacet in Aſymptotôn Angulo ad-inſtar Hyperbolæ conicæ; *Circumſcriptam*, quæ Aſymptotos, ſecat, & partes Abſciſſas in ſinu ſuo amplectitur; *Ambigenam*, quæ uno crure infinito inſcribitur & altero circumſcribitur; *Convergentem*, cujus crura concavitate ſuâ ſe invicem reſpiciunt, & in plagam eandem diriguntur; *Divergentem*, cujus crura convexitate ſuâ ſe invicem reſpiciunt & in plagas contrarias diriguntur; *Cruribus Contrariis præditam*, cujus crura in partes contrarias convexa ſunt, & in plagas contrarias infinita; *Conchoidalem*, quæ Vertice concavo & cruribus divergentibus ad Aſymptoton applicatur; *Anguineam*, quæ Flexibus contrariis Aſymptoton ſecat, & utrinque in crura contraria producitur; *Cruciformem*, quæ conjugatam decuſſat; *Nodatam*, quæ

Digitized by Google

quæ ſeipſam decuſſat in orbem redeundo; ***Cuſpidatam***, cujus partes duæ in Angulo contactûs concurrunt & ibi terminantur; ***Punctatam***, quæ conjugatam habet Ovalem infinitè parvam, id eſt, Punctum; & ***Puram***, quæ, per impoſſibilitatem duarum Radicum, Ovali, Nodo, Cuſpide & Puncto conjugato privatur. Eodem ſenſu Parabolam quoque ***convergentem***, ***divergentem***, ***cruribus contrariis præditam***, ***cruciformem***, ***nodatam***, ***cuſpidatam***, ***punctatam & puram*** nominabimus.

In Caſu primo ſi Terminus ax^3 affirmativus eſt, Figura erit (*Fig.* 5.) Hyperbola triplex cum ſex cruribus Hyperbolicis, quæ juxta tres Aſymptotos, quarum nullæ ſunt parallelæ, in infinitum progrediuntur, binæ juxta unamquamque in plagas contrarias. Et hæ Aſymptoti, ſi Terminus bx^2 non deeſt, ſe mutuò ſecabunt in tribus Punctis Triangulum (D d δ) inter ſe continentes, ſin terminus bx^2 deeſt, convergent omnes ad idem Punctum. In priori Caſu cape $AD = \frac{-b}{2a}$, & $Ad = A\delta = \frac{b}{2\sqrt{a}}$, ac junge Dd, Dδ, & erunt Ad, Dd, Dδ tres Aſymptoti. In poſteriori (*Fig.* 6.) duc Ordinatam quamvis BC, Ordinatæ principali AG parallelam, & in eâ utrinque productâ cape hinc inde BF, & Bf ſibi mutuò æquales, & in eâ Ratione ad AB, quam habet $\sqrt{a}$ ad 1, jungéque AF, Af; & erunt AG, AF, Af tres Aſymptoti. Hanc Hyperbolam vocamus ***Redundantem***, quia numero crurum Hyperbolicorum Sectiones Conicas ſuperat. TAB. I.

In Hyperbolâ omni redundante, ſi neque Terminus ey deſit, neque ſit $bb - 4ac$ æquale $+ ae\sqrt{a}$, Curva nullam habebit Diametrum; ſin eorum alterutrum accidit, Curva habebit unicam Diametrum, & tres ſi utrumque. Diameter autem ſemper tranſit per interſectionem duarum Aſymptotôn, & biſecat Rectas omnes, quæ ad Aſymptotos illas utrinque terminantur & parallelæ ſunt Aſymptoto tertiæ. Eſtque Abſciſſa AB Diameter Figuræ quoties Terminus ey deeſt. ***Diametrum*** verò abſolutè dictam hìc & in ſequentibus in vulgari ſignificatu uſurpo, nempe pro Abſciſſâ, quæ paſſim habet Ordinatas binas æquales ad idem Punctum hinc inde inſiſtentes.

I V.

Enumeratio Curvarum.

1. *De Hyperbolis novem redundantibus, quæ Diametro deſtituuntur, & tres habent Aſymptotos Triangulum capientes.*

Si Hyperbola redundans nullam habet Diametrum, quærantur Æquationis hujus $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee = 0$ Radices
TAB. I. quatuor ſeu valores ipſius x. Eæ ſunto (*Fig.* 5. *&c.*) AP, Aϖ,
& ſeq. Aπ, Ap. Erigantur Ordinatæ PT, $\varpi\tau$, π7, pt, & hæ tangent Curvam in Punctis totidem T, τ, 7, t, & tangendo dabunt Limites Curvæ, per quos Species ejus innoteſcet.

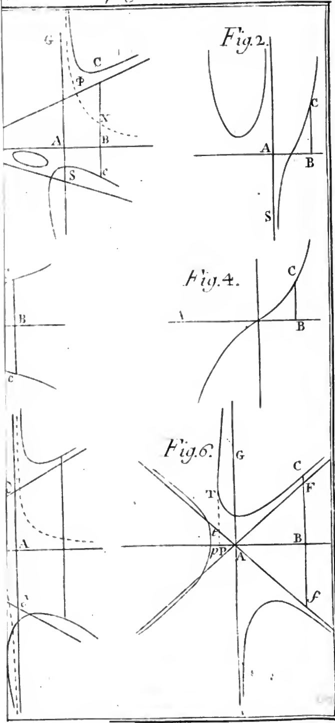
TAB. I. & II. Nam, ſi Radices omnes AP, Aϖ, Ap, (*Fig.* 5. 7.) ſunt reales, ejuſdem ſigni, & inæquales, Curva conſtat ex tribus Hyperbolis, (inſcriptâ, circumſcriptâ, & ambigenâ) cum *Ovali.* Hyperbolarum una jacet verſùs D, altera verſus d, tertia verſùs δ, & Ovalis ſemper jacet intra Triangulum D d δ, atque etiam inter medios Limites 7 & τ, in quibus utique tangitur ab Ordinatis π7 & $\varpi\tau$. Et hæc eſt *Species prima.*

TAB. II. Si è Radicibus duæ maximæ Aπ, Ap, (*Fig.* 8.) vel duæ minimæ AP, Aϖ (*Fig.* 9.) æquantur inter ſe, & ejuſdem ſunt ſigni cum alteris duobus, Ovalis & Hyperbola circumſcripta ſibi invicem junguntur, coeuntibus earum Punctis contactûs 7, & t, vel T, & τ, & crura Hyperbolæ ſeſe decuſſando in Ovalem continuantur, Figuram *Nodatam* efficientia. Quæ *Species* eſt *ſecunda.*

Si è Radicibus tres maximæ Ap, Aπ, Aϖ, (*Fig.* 10.,) vel tres minimæ Aπ, Aϖ, AP (*Fig.* 11.) æquentur inter ſe, Nodus in *Cuſpidem* acutiſſimum convertetur. Nam, crura duo Hyperbolæ circumſcriptæ ibi in Angulo contactûs concurrent, & non ultra producentur. Et hæc eſt *Species tertia.*

Si è Radicibus duæ mediæ Aϖ & Aπ (*Fig.* 12.,) æquentur inter ſe, Puncta contactûs τ, & 7 coincidunt, & propterea Ovalis interjecta in Punctum evanuit, & conſtat Figura ex tribus Hyperbolis

IV. Tab. I. *pag.* 254. *Tom. I.*



Digitized by Google

Digitized by Google

bolis, inſcriptâ, circumſcriptâ, & ambigenâ cum *Puncto* conjugato. Quæ eſt *Species quarta.*

Si duæ ex Radicibus ſunt impoſſibiles & reliquæ duæ inæquales, & ejuſdem ſigni (nam ſigna contraria habere nequeunt,) *Puræ* habebuntur Hyperbolæ tres ſine Ovali, vel Nodo, vel Cuſpide, vel Puncto conjugato, & hæ Hyperbolæ, vel ad latera Trianguli ab Aſymptotis comprehenſi, vel ad Angulos ejus jacebunt; & perinde *Speciem*, vel *quintam* (*Fig.* 12. 13.), vel *ſextam* (*Fig.* 14.15.) conſtituent. TAB. II.

Si è Radicibus duæ ſunt æquales, & alteræ duæ, vel impoſſibiles ſunt (*Fig.* 16. 18.), vel reales (*Fig.* 17. 19.) cum ſignis, quæ à ſignis æqualium Radicum diverſa ſunt, Figura *Cruciformis* habebitur, nempe duæ ex Hyperbolis ſe invicem decuſſabunt, idque, vel ad Verticem Trianguli ab Aſymptotis comprehenſi (*Fig.* 18.19.), vel ad ejus Baſem (*Fig.* 16. 17.) Quæ duæ *Species* ſunt *ſeptima* & *octava.* TAB. III. TAB. IV.

Si denique Radices omnes ſunt impoſſibiles (*Fig.* 20.), vel ſi omnes ſunt reales, & inæquales (*Fig.* 21.), & earum duæ ſunt affirmativæ, & alteræ duæ negativæ, tunc duæ habebuntur Hyperbolæ ad Angulos oppoſitos duarum Aſymptotôn cum Hyperbolâ *Anguineâ* circa Aſymptoton tertiam. Quæ *Species* eſt *nona.*

Et hi ſunt omnes Radicum caſus poſſibiles. Nam, ſi duæ Radices ſunt æquales inter ſe, & aliæ duæ ſunt etiam inter ſe æquales, Figura evadet Sectio conica cum Lineâ rectâ.

2. *De Hyperbolis duodecim redundantibus unicam tantùm Diametrum habentibus.*

Si Hyperbola redundans habet unicam tantùm Diametrum, ſit ejus Diameter Abſciſſa AB, & Æquationis hujus $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ quære tres Radices ſeu valores x.

Si Radices illæ ſunt omnes reales, & ejuſdem ſigni, Figura conſtabit ex *Ovali* intra Triangulum Ddδ (*Fig.* 22.) jacente, & tribus Hyperbolis ad Angulos ejus, nempe Circumſcriptâ ad Angulum TAB. IV.

D, &

D, & Inſcriptis duabus ad Angulos d, & δ. Et hæc eſt *Species decima.*

Si Radices duæ majores ſunt æquales, & tertia ejuſdem ſigni, crura Hyperbolæ jacentis verſùs D (*Fig.* 23.) ſeſe decuſſabunt in formâ *Nodi* propter contactum Ovalis. Quæ *Species* eſt *undecima.*

Si tres Radices ſunt æquales, Hyperbola iſta fit *Cuſpidata* ſine
TAB. VI. Ovali (*Fig.* 24.) Quæ *Species* eſt *duodecima.*

Si Radices duæ minores ſunt æquales, & tertia ejuſdem ſigni,
TAB. V. Ovalis in *Punctum* evanuit, (*Fig.* 25.) Quæ *Species* eſt *decima tertia.*

In Speciebus quatuor noviſſimis Hyperbola, quæ jacet verſùs D, Aſymptotos in ſinu ſuo amplectitur, reliquæ duæ in ſinu Aſyptotôn jacent.

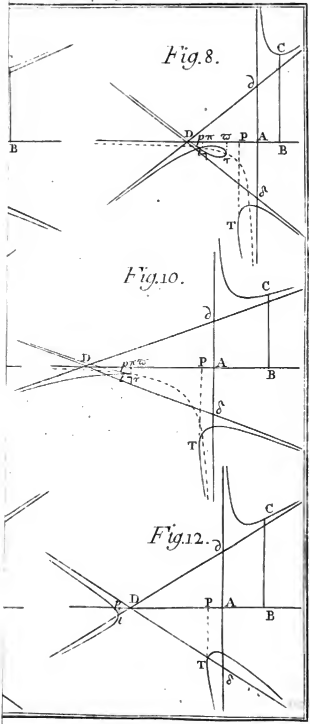
Si duæ ex Radicibus ſunt impoſſibiles, habebuntur tres Hyperbolæ *Puræ*, ſine Ovali, Decuſſatione, vel Cuſpide. Et hujus Caſûs *Species* ſunt quatuor: nempe *decima quarta*, ſi Hyperbola Circumſcripta jacet verſùs D, (*Fig.* 25.) & *decima quinta*, ſi Hyperbola Inſcripta jacet verſùs D, (*Fig.* 26.) & *decima ſexta*, ſi Hyperbola Circumſcripta jacet ſub Baſi dδ Trianguli Ddδ, (*Fig.* 27.) & *decima ſeptima*, (*Fig.* 28.), ſi Hyperbola Inſcripta jacet ſub eâdem Baſi.

Si duæ Radices ſunt æquales, & tertia ſigni diverſi, Figura erit *Cruciformis.* Nempe, duæ ex tribus Hyperbolis ſe invicem decuſſabunt; ídque, vel ad Verticem Trianguli ab Aſymptotis comprehenſi, (*Fig.* 29.), vel ad ejus Baſem, (*Fig.* 30.) Quæ duæ *Species* ſunt *decima octava*, & *decima nona.*

Si duæ Radices ſunt inæquales, & ejuſdem ſigni, & tertia eſt ſigni diverſi, duæ habebuntur Hyperbolæ in oppoſitis Angulis duarum Aſymptotôn cum *Conchoidali* intermediâ. *Conchoidalis* autem, vel jacebit ad eaſdem partes Aſymptoti ſuæ cum Triangulo ab Aſymptotis conſtituto, (*Fig.* 31.) vel ad partes contrarias; (*Fig.* 32.)
TAB. VI. Et hi duo Caſus conſtituunt *Speciem vigeſimam*, & *vigeſimam primam.*

2 *De*

Digitized by Google



Digitized by Google

3 *De Hyperbolis duabus redundantibus cum tribus Diametris.*

Hyperbola redundans, quæ habet tres Diametros, conſtat ex tribus Hyperbolis in ſinubus Aſymptotôn jacentibus; idque, vel ad Angulos Trianguli ab Aſymptotis comprehenſi, (*Fig.* 33.), vel ad ejus Latera, (*Fig.* 34.). Caſus prior dat *Speciem vigeſimam ſecundam*, & poſterior *Speciem vigeſimam tertiam.* TAB. VI.

4. *De Hyperbolis novem redundantibus cum Aſymptotis tribus ad commune Punctum convergentibus.*

Si tres Aſymptoti in Puncto communi ſe mutuò decuſſant, vertuntur Species quinta, & ſexta in *vigeſimam quartam*; (*Fig.* 6.) ſeptima, & octava in *vigeſimam quintam*, (*Fig.* 35.) & nona in *vigeſimam ſextam*, (*Fig.* 36.) ubi Anguinea non tranſit per concurſum Aſymptotôn; & in *vigeſimam ſeptimam*, ubi tranſit per concurſum illum, (*Fig.* 37.), quo Caſu Termini *b*, ac *d* deſunt, & concurſus Aſymptotôn eſt Centrum Figuræ ab omnibus ejus partibus oppoſitis æqualiter diſtans. Et hæ quatuor Species Diametrum non habent. TAB. I. TAB. VI. TAB. VII.

Vertuntur etiam *Species* decima quarta, ac decima ſexta in *vigeſimam octavam*; (*Fig.* 38.) decima quinta, ac decima ſeptima in *vigeſimam nonam*; (*Fig.* 39.) decima octava, & decima nona in *triceſimam*; (*Fig.* 40.) & vigeſima cum vigeſimâ primâ in *triceſimam primam*, (*Fig.* 41.) Et hæ Species unicam habent Diametrum.

Ac denique Species vigeſima ſecunda, & vigeſima tertia vertuntur in *Speciem triceſimam ſecundam*, cujus tres ſunt Diametri per concurſum Aſymptotôn tranſeuntes (*Fig.* 42.).

Quæ omnes converſiones facillimè intelliguntur faciendo, ut Triangulum ab Aſymptotis comprehenſum diminuatur, donec in Punctum evaneſcat.

5. *De Hyperbolis ſex defectivis Diametrum non habentibus.*

Si in primo Æquationum Caſu Terminus ax^3 negativus eſt, Figura erit Hyperbola defectiva unicam habens Aſymptoton, & duo tantùm crura Hyperbolica juxta Aſymptoton illam in plagas contrarias infinitè progredientia. Et Aſymptotos illa eſt Ordinata prima, & principalis AG. Si Terminus ey non deeſt, Figura nullam habebit Diametrum, ſi deeſt habebit unicam. In priori Caſu Species ſic enumerantur.

Si Æquationis hujus $ax^4 = bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee$ Radices TAB. VIII. omnes $A\pi$, AP, Ap, $A\varpi$, (*Fig.* 43.) ſunt reales, & inæquales, Figura erit Hyperbola Anguinea Aſymptoton Flexu contrario amplexa, cum *Ovali* conjugatâ. Quæ *Species* eſt *triceſima tertia.*

Si Radices duæ mediæ AP, & Ap, (*Fig.* 44.) æquentur inter ſe, Ovalis, & Anguinea junguntur ſeſe decuſſantes in forma *Nodi.* Quæ eſt *Species triceſima quarta.*

Si tres Radices ſunt æquales, Nodus vertetur in *Cuſpidem* acutiſſimum in vertice Anguineæ; (*Fig.* 45.) Et hæc eſt *Species triceſima quinta.*

Si è tribus Radicibus ejuſdem ſigni, duæ maximæ, Ap & $A\varpi$ (*Fig.* 47.) ſibi mutuò æquantur, Ovalis in *Punctum* evanuit. Quæ *Species* eſt *triceſima ſexta.*

Si Radices duæ quævis imaginariæ ſunt, ſola manebit Anguinea *Pura* ſine Ovali, Decuſſatione, Cuſpide, vel Puncto conjugato. Si Anguinea illa non tranſit per Punctum A, (*Fig.* 46.) *Species* eſt *triceſima ſeptima*; ſin tranſit per Punctum illud A (id quod contingit, ubi Termini b, ac d deſunt,) Punctum illud A erit Centrum Figuræ Rectas omnes per ipſum ductas, & ad Curvam utrinque terminatas, biſecans (*Fig.* 47.) Et hæc eſt *Species triceſima octava.*

6. *De Hyperbolis ſeptem defectivis Diametrum habentibus.*

In altero Caſu, ubi Terminus ey deeſt, & propterea Figura Diame-

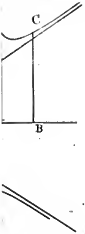
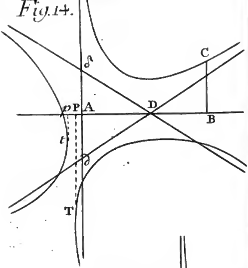


Fig. 14.



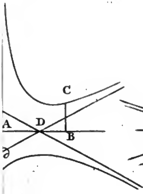
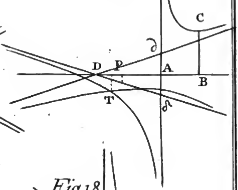


Fig. 16.



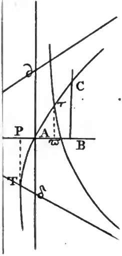
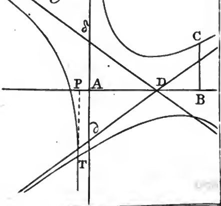
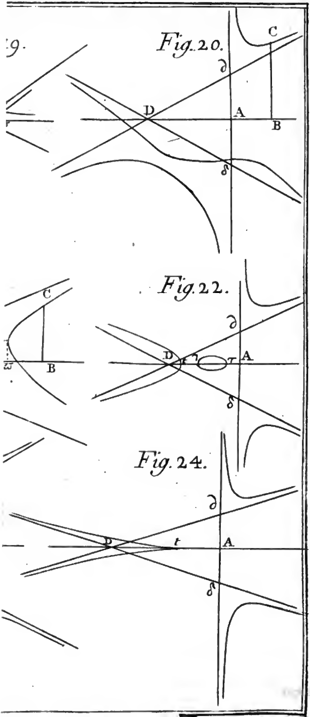


Fig. 18.

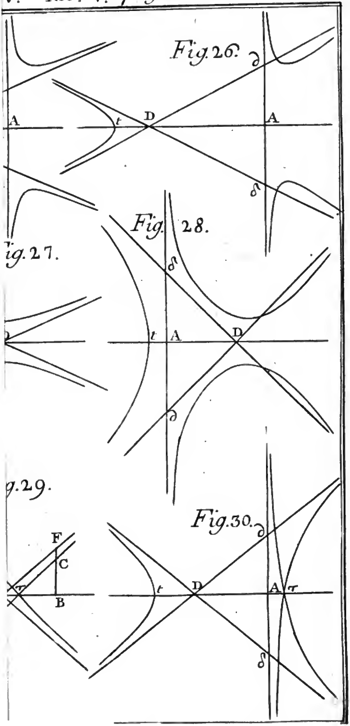


Digitized by Google

Digitized by Google


:9.
Fig. 20.
C
∂
D
A
B
δ
Fig. 22.
C
∂
D
A
ϖ
B
δ
Fig. 24.
∂
D
t
A
δ

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 32.

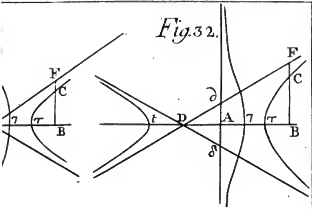


Fig. 34.

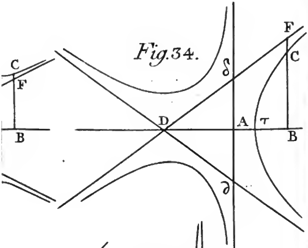
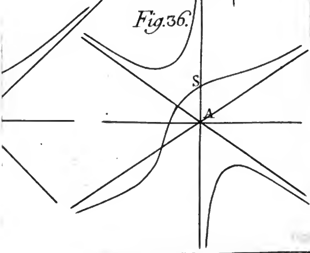


Fig. 36.



Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 37.

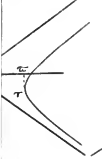


Fig. 38.

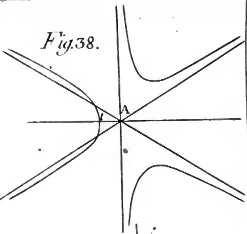


Fig. 39.

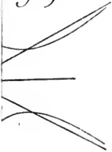


Fig. 40.

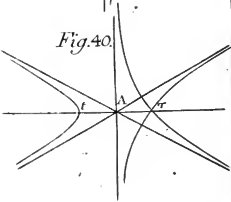


Fig. 41.

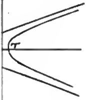
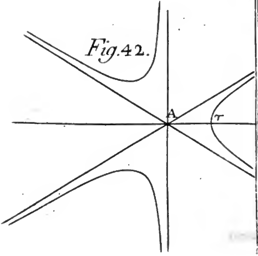
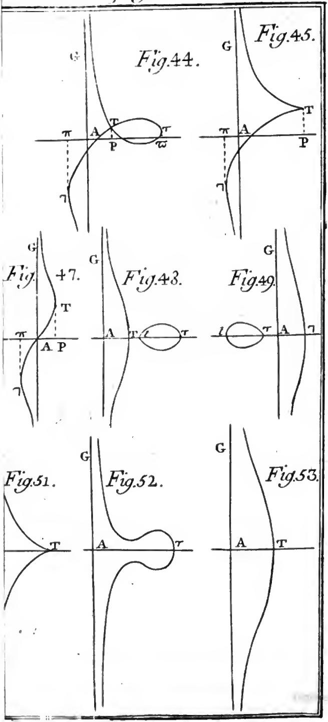


Fig. 42.



Digitized by Google

Digitized by Google


Fig. 44.
G
A
T
τ
π
P
ϖ
Fig. 45.
G
T
π
A
P
Fig. 47.
G
T
π
A P
Fig. 48.
G
A
T
τ
Fig. 49.
G
τ
A
Fig. 51.
T
Fig. 52.
G
A
τ
Fig. 53.
G
A
T

Digitized by Google

Diametrum habet, ſi Æquationis hujus $ax^3 = bx^2 + cx + d$ Radices omnes AT, At, Aτ, (*Fig.* 48.) ſunt reales, inæquales, & ejuſdem ſigni, Figura erit Hyperbola Conchoidalis cum *Ovali* ad convexitatem. Quæ eſt *Species triceſima nona.* TAB. VIII.

Si duæ Radices ſunt inæquales, & ejuſdem ſigni, & tertia eſt ſigni contrarii, *Ovalis* jacebit ad concavitatem Conchoidalis; (*Fig.* 49.) Eſtque *Species quadrageſima.*

Si Radices duæ minores AT, At, (*Fig.* 50.) ſunt æquales, & tertia Aτ, eſt ejuſdem ſigni; Ovalis, & Conchoidalis jungentur ſeſe decuſſando in modum *Nodi.* Quæ *Species* eſt *quadrageſima prima.*

Si tres Radices ſunt æquales, Nodus mutabitur in *Cuſpidem*, & Figura erit *Ciſſois Veterum*, (*Fig.* 51.) Et hæc eſt *Species quadrageſima ſecunda.*

Si Radices duæ majores ſunt æquales, & tertia eſt ejuſdem ſigni; Conchoidalis habebit *Punctum* conjugatum ad convexitatem ſuam, (*Fig.* 52.) Eſtque *Species quadrageſima tertia.*

Si Radices duæ ſunt æquales, & tertia eſt ſigni contrarii, Conchoidalis habebit *Punctum* conjugatum ad concavitatem ſuam, (*Fig.* 53.) Eſtque *Species quadrageſima quarta.*

Si Radices duæ ſunt impoſſibiles habebitur Conchoidalis *Pura* ſine Ovali, Nodo, Cuſpide, vel Puncto conjugato (*Fig.* 52. & 53.). Quæ *Species* eſt *quadrageſima quinta.*

7. *De Hyperbolis ſeptem Parabolicis Diametrum non habentibus.*

Si quando in primo Æquationum Caſu Terminus ax^3 deeſt, & Terminus bxx non deeſt, Figura erit Hyperbola Parabolica duo habens crura Hyperbolica ad unam Aſymptoton SAG & duo Parabolica in plagam unam & eandem convergentia. Si Terminus ey non deeſt, Figura nullam habebit Diametrum; ſin deeſt, habebit unicam. In Priori Caſu Species ſunt hæ.

Si tres Radices AP, Aϖ, Aπ (*Fig.* 54.) Æquationis hujus $bx^3 + cxx + dx + \frac{1}{4}ee = 0$ ſunt inæquales & ejuſdem ſigni, TAB. IX.

 Figura

Figura conſtabit ex *Ovali*, & aliis duabus Curvis, quæ partim Hyperbolicæ ſunt, & partim Parabolicæ. Nempe crura Parabolica continuo ductu junguntur cruribus Hyperbolicis ſibi proximis. Et hæc eſt *Species quadrageſima ſexta.*

Si Radices duæ minores ſunt æquales, & tertia eſt ejuſdem ſigni; Ovalis, & una Curvarum illarum Hyperbolo-Parabolicarum junguntur & ſe decuſſant in formam *Nodi* (*Fig.* 55.) Quæ *Species* eſt *quadrageſima ſeptima.*

TAB.IX.

Si tres Radices ſunt æquales, Nodus ille in Cuſpidem vertitur (*Fig.* 56.) Eſtque *Species quadrageſima octava.*

Si Radices duæ majores ſunt æquales, & tertia eſt ejuſdem ſigni; Ovalis in *Punctum* conjugatum evanuit (*Fig.* 57.) Quæ *Species* eſt *quadrageſima nona.*

Si duæ Radices ſunt impoſſibiles, manebunt *Pura* illæ duæ Curvæ Hyperbolo-Parabolicæ ſine Ovali, Decuſſatione, Cuſpide, vel Puncto conjugato; & *Speciem quinquageſimam* conſtituent. (*Fig.* 57. & 58.)

Si Radices duæ ſunt æquales, & tertia eſt ſigni contrarii; Curvæ illæ Hyperbolo-Parabolicæ junguntur ſeſe decuſſando in morem crucis (*Fig.* 59.) Eſtque *Species quinquageſima prima.*

Si Radices duæ ſunt inæquales, & ejuſdem ſigni, & tertia eſt ſigni contrarii; Figura evadet Hyperbola Anguinea circa Aſymptoton AG, (*Fig.* 60.) cum Parabolâ conjugatâ. Et hæc eſt *Species quinquageſima ſecunda.*

8. *De Hyperbolis quatuor Parabolicis Diametrum habentibus.*

In altero Caſu, ubi Terminus ey deeſt, & Figura Diametrum habet, ſi duæ Radices Æquationis hujus $bxx + cx + d = 0$ ſunt impoſſibiles; duæ habentur Figuræ Hyperbolo-Parabolicæ à Diametro AB (*Fig.* 61.) hinc inde æqualiter diſtantes. Quæ *Species* eſt *quinquageſima tertia.*

Si Æquationis illius Radices duæ ſunt impoſſibiles, Figuræ Hyperbolo-Parabolicæ junguntur ſeſe decuſſantes in morem crucis; & *Speciem quinquageſimam quartam* conſtituunt. (*Fig.* 62.).

TAB. X.

Si

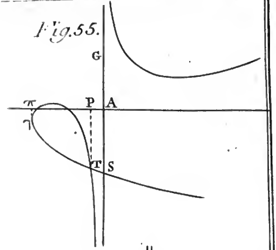


Fig. 55.

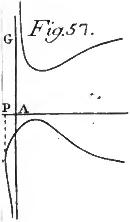


Fig. 57.

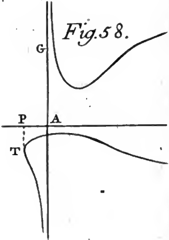


Fig. 58.

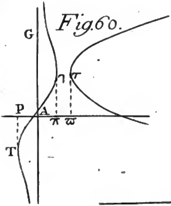


Fig. 60.

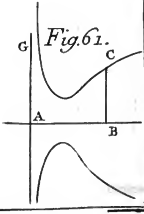


Fig. 61.

Digitized by Google

Si Radices illæ ſunt inæquales & ejuſdem ſigni; habetur Hyperbola Conchoidalis cum Parabolâ ex eodem latere Aſymptoti. (*Fig*. 63.) TAB. X. Eſtque *Species quinquageſima quinta*.

Si Radices illæ ſunt ſigni contrarii; habetur Conchoidalis cum Parabolâ ad alteras partes Aſymptoti (*Fig*. 64.). Quæ *Species* eſt *quinquageſima ſexta*.

9. *De Quatuor Hyperboliſmis Hyperbolæ.*

Si quando, in primo Æquationum caſu, Terminus uterque ax^3, & bxx deeſt; Figura erit Hyperboliſmus Sectionis alicujus conicæ. *Hyperboliſmum* Figuræ voco, cujus Ordinata prodit applicando contentum ſub Ordinatâ Figuræ illius & Rectâ datâ ad Abſciſſam communem. Hac ratione Linea recta vertitur in Hyperbolam conicam, & Sectio omnis conica vertitur in aliquam Figurarum, quas hìc Hyperboliſmos Sectionum conicarum voco. Nam, Æquatio ad Figuras, de quibus agimus, nempe $xyy+ey=cx+d$, dat $y=\frac{e\pm\sqrt{ee+4dx+4cxx}}{2x}$; quæ generatur applicando contentum ſub Ordinatâ Sectionis conicæ $\frac{e\pm\sqrt{ee+4dx+4cxx}}{2m}$, & Rectâ datâ m, ad Curvarum Abſciſſam communem x. Unde liquet, quòd Figura genita Hyperboliſmus erit Hyperbolæ, Ellipſeos, vel Parabolæ, perinde ut Terminus cx affirmativus eſt, vel negativus, vel nullus.

Hyperboliſmus Hyperbolæ tres habet Aſymptotos, quarum una eſt Ordinata prima & principalis Ad, alteræ duæ ſunt parallelæ Abſciſſæ AB, ab eâdem hinc inde æqualiter diſtant. In Ordinatâ principali Ad, cape Ad, Aδ, hinc inde æquales Quantitati $\sqrt{c}$; & per Puncta d, ac δ age dg, $\delta\gamma$ Aſymptotos Abſciſſæ AB parallelas.

Ubi Terminus ey non deeſt, Figura nullam habet Diametrum. In hoc Caſu, ſi Æquationis hujus $cxx+dx+\frac{1}{4}ee=0$ Radices duæ AP, Ap (*Fig*. 65.) ſunt reales & inæquales, (nam æquales eſſe nequeunt niſi Figura ſit conica Sectio, Figura conſtabit ex tri-

bus Hyperbolis ſibi oppoſitis, quarum una jacet inter Aſymptotos parallelas, & alteræ duæ jacent extra. Et hæc eſt *Species quinquageſima ſeptima.*

Si Radices illæ duæ ſunt impoſſibiles, habentur Hyperbolæ duæ oppoſitæ extra Aſymptotos parallelas & Anguinea Hyperbolica intra eaſdem. Hæc Figura duarum eſt ſpecierum. Nam, Centrum non
TAB. X. habet, ubi Terminus d non deeſt: (*Fig. 66.*) ſed ſi Terminus ille deeſt, Punctum A eſt ejus centrum (*Fig. 67.*) Prior *Species* eſt *quinquageſima octava*, poſterior *quinquageſima nona.*

Quòd ſi Terminus ey deeſt, Figura conſtabit ex tribus Hyperbolis oppoſitis, quarum una jacet inter Aſymptotos parallelas, & alteræ duæ jacent extra, ut in Specie quinquageſimâ quartâ, & præterea Diametrum habet, quæ eſt Abſciſſa AB (*Fig. 68.*) Et hæc eſt *Species ſexageſima.*

10. *De tribus Hyperboliſmis Ellipſeos.*

Hyperboliſmus Ellipſeos per hanc Æquationem definitur $xyy + ey = cx + d$, & unicam habet Aſymptoton, quæ eſt Ordinata
TAB XI. principalis Ad (*Fig. 69.*) Si Terminus ey non deeſt, Figura eſt Hyperbola Anguinea ſine Diametro; atque etiam ſine Centro, ſi Terminus d non deeſt. Quæ *Species* eſt *ſexageſima prima.*

At ſi Terminus d deeſt, Figura habet Centrum ſine Diametro, & Centrum ejus eſt Punctum A (*Fig. 70.*) *Species* verò eſt *ſexageſima ſecunda.*

Et, ſi Terminus ey deeſt & Terminus d non deeſt, Figura eſt Conchoidalis ad Aſymptoton AG (*Fig. 71.*,) habétque Diametrum ſine Centro, & Diameter ejus eſt Abſciſſa AB. Quæ *Species* eſt *ſexageſima tertia.*

11. *De duobus Hyperboliſmis Parabolæ.*

Hyperboliſmus Parabolæ per hanc Æquationem definitur $xyy + ey = d$; & duas habet Aſymptotos, Abſciſſam AB, & Ordinatam pri-

Digitized by Google



Fig. 63.

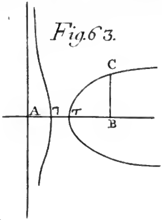


Fig. 64.

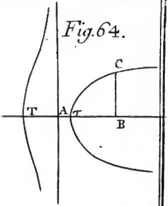


Fig. 65.

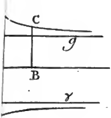
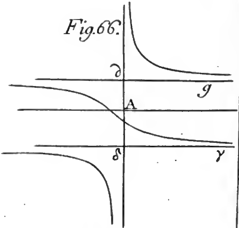


Fig. 66.



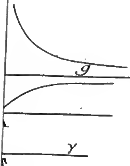
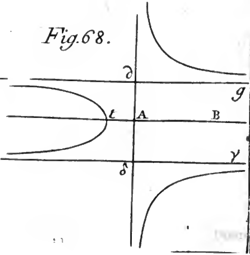


Fig. 68.



Digitized by Google

Digitized by Google

primam & principalem AG. Hyperbolæ verò in hac Figurâ ſunt duæ, non in Aſymptotôn Angulis oppoſitis, ſed in Angulis qui ſunt deinceps jacentes, ídque ad utrumque Latus Abſciſſæ AB, &, vel ſine Diametro, ſi Terminus ey habetur, (*Fig.* 72.) vel cum Diametro, ſi Terminus ille deeſt, (*Fig.* 73.) Quæ duæ *Species* ſunt *ſexageſima quarta*, & *ſexageſima quinta*. TAB.XI.

12. *De Tridente.*

In ſecundo Æquationum Caſu habebatur Æquatio $xy = ax^3 + bxx + cx + d$. Et Figura in hoc Caſu habet quatuor crura infinita, quorum duo ſunt Hyperbolica circa Aſymptoton AG (*Fig.* 76.) in contrarias partes tendentia, & duo Parabolica convergentia, & cum prioribus ſpeciem Tridentis ferè efformantia. Eſtque hæc Figura Parabola illa, per quam Cartesius Æquationes ſex Dimenſionum conſtruxit. Hæc eſt igitur *Species ſexageſima ſexta*.

13. *De Parabolis quinque divergentibus.*

In Tertio Caſu Æquatio erat $yy = ax^3 + bxx + cx + d$, & Parabolam deſignat, cujus crura divergunt ab invicem, & in contrarias partes infinitè progrediuntur. Abſciſſa AB eſt ejus Diameter, & Species ejus ſunt quinque ſequentes. TAB.XII.

Si Æquationis $ax^3 + bxx + cx + d = 0$, Radices omnes $A\tau$, AT, At ſunt reales & inæquales, Figura eſt Parabola divergens Campaniformis cum *Ovali* ad verticem (*Fig.* 74. 75.). Et *Species* eſt *ſexageſima ſeptima*.

Si Radices duæ ſunt æquales, Parabola prodit, vel *Nodata* contingendo Ovalem (*Fig.* 77.), vel *Punctata*, ob Ovalem infinitè parvam (*Fig.* 78.). Quæ duæ *Species* ſunt *ſexageſima octava*, & *ſexageſima nona*.

Si tres Radices ſunt æquales, Parabola erit *Cuſpidata* in Vertice (*Fig.* 80..

TAB.XI. (*Fig.* 80.) Et hæc eſt Parabola *Neiliana*, quæ vulgo *Semicubica* dicitur. Et eſt *Species ſeptuageſima*.

Si Radices duæ ſunt impoſſibiles, habetur Parabola *Pura* campaniformis (*Fig.* 78. 79.) *Speciem ſeptuageſimam primam* conſtituens.

14. *De Parabolâ Cubicâ.*

In quarto Caſu Æquatio erat $y = ax^3 + bxx + cx + d$, & hæc Æquatio Parabolam deſignat, quæ crura habet contraria, & *Cubica* dici ſolet (*Fig.* 81.) Et ſic *Species* omnino ſunt *ſeptuaginta dua*.

V.

Geneſis Curvarum per Umbras.

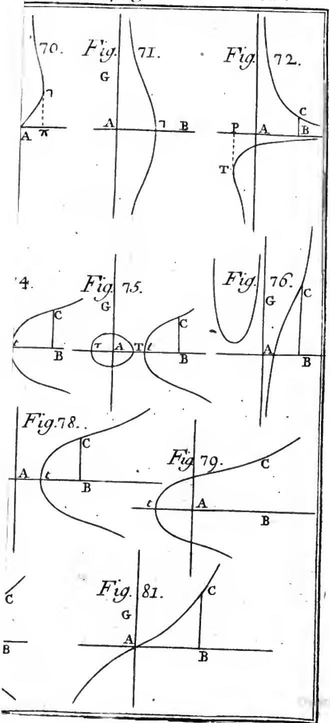
Si in Planum infinitum à Puncto lucido illuminatum Umbræ Figurarum projiciantur, Umbræ Sectionum conicarum ſemper erunt Sectiones conicæ; eæ Curvarum ſecundi Generis ſemper erunt Curvæ ſecundi Generis; eæ Curvarum tertii Generis ſemper erunt Curvæ tertii Generis, & ſic deinceps in infinitum.

Et, quemadmodum Circulus, Umbram projiciendo, generat Sectiones omnes conicas, ſic Parabolæ quinque divergentes Umbris ſuis generant & exhibent alias omnes ſecundi Generis Curvas; & ſic Curvæ quædam ſimpliciores aliorum Generum inveniri poſſunt, quæ alias omnes eorundem Generum Curvas Umbris ſuis à Puncto lucido in Planum projectis formabunt.

De Curvarum Punctis duplicibus.

Diximus Curvas ſecundi Generis à Lineâ rectâ in Punctis tribus ſecari poſſe. Horum duo nonnunquam coincidunt. Ut, cùm Recta per Ovalem infinitè parvam tranſit; vel per concurſum duarum partium Curvæ ſe mutuò ſecantium, vel in Cuſpidem coeuntium, duci-

Tab. XI. *pag.* 264. *Tom. I.*



Digitized by Google

ducitur. Et, ſi quando Rectæ omnes in plagam cruris alicujus infiniti tendentes Curvam in unico tantùm Puncto ſecant, (ut fit in Ordinatis Parabolæ *Carteſianæ*, & Parabolæ cubicæ, nec non in Rectis Abſciſſæ Hyperboliſmorum Hyperbolæ, & Parabolæ parallelis) concipiendum eſt, quòd Rectæ illæ per alia duo Curvæ Puncta ad infinitam diſtantiam ſita (ut ita dicam) tranſeunt. Hujuſmodi interſectiones duas coincidentes, ſive ad finitam ſint diſtantiam ſive ad infinitam, vocabimus *Punctum Duplex*. Curvæ autem, quæ habent Punctum Duplex deſcribi poſſunt per ſequentia Theoremata.

V I.

De Curvarum Deſcriptione Organicâ.

THEOR. I.

Si (*Fig.* 82.) Anguli duo magnitudine dati PAD, PBD, circa Polos poſitione datos A, B, rotentur, & eorum crura AP, BP, concurſu ſuo P percurrant Lineam rectam; crura duo reliqua AD, BD concurſu ſuo D deſcribent Sectionem conicam per Polos A, B, tranſeuntem: præterquàm ubi Linea illa recta tranſit per Polorum alterutrum A vel B, vel Anguli BAD, ABD ſimul evaneſcunt, quibus in caſibus Punctum D deſcribet Lineam rectam. TAB. XII.

THEOR. II.

Si (*Fig.* 83.) crura AP, BP concurſu ſuo P percurrant Sectionem conicam per Polum alterutrum A tranſeuntem, crura duo reliqua AD, BD concurſu ſuo D deſcribent Curvam ſecundi Generis per Polum alterum B tranſeuntem, & Punctum duplex habentem in Polo primo A, per quem Sectio conica tranſit: præterquàm ubi Anguli BAD, ABD ſimul evaneſcunt, quo caſu Punctum D deſcribet aliam Sectionem conicam per Polum A tranſeuntem.

THEOR. III.

At, ſi Sectio Conica, quam Punctum P percurrit tranſeat per neutrum Polorum A, B, (*Fig.* 84.) Punctum D deſcribet Curvam ſecundi, vel tertii generis Punctum duplex habentem. Et Punctum illud duplex in concurſu crurum deſcribentium, A D, B D invenietur, ubi Anguli B A P, A B P ſimul evaneſcunt. Curva autem deſcripta ſecundi erit Generis, ſi Anguli B A D, A B D ſimul evaneſcunt, aliàs erit tertii Generis, & alia duo habebit Puncta duplicia in Polis A & B.

TAB. XII.

Sectionum Conicarum deſcriptio per data quinque Puncta.

Jam Sectio conica determinatur ex datis ejus Punctis quinque, & per eadem ſic deſcribi poteſt. Dentur (*Fig.* 85.) ejus Puncta quinque A, B, C, D, E. Jungantur eorum tria quævis A, B, C, & Trianguli A B C rotentur Anguli duo quivis C A B, C B A circa Vertices ſuos A, & B; &, ubi crurum A C, B C interſectio C ſucceſſivè applicatur ad Puncta duo reliqua D, E, incidat interſectio crurum reliquorum A B & B A in Puncta P & Q. Agatur & infinitè producatur Recta P Q, & Anguli mobiles ita rotentur, ut interſectio crurum A B, B A percurrat Rectam P Q, & crurum reliquorum interſectio C deſcribet propoſitam Sectionem conicam per Theorema primum.

Curvarum ſecundi Generis Punctum duplex habentium Deſcriptio per data ſeptem Puncta.

Curvæ omnes ſecundi Generis Punctum Duplex habentes determinantur ex datis earum Punctis ſeptem, quorum unum eſt Punctum illud duplex, & per eadem Puncta ſic deſcribi poſſunt. Dentur (*Fig.* 86.) Curvæ deſcribendæ Puncta quælibet ſeptem A, B, C, D, E, F, G, quorum A eſt Punctum Duplex. Jungantur Punctum A, & alia duo quævis è Punctis, puta B, & C; & Trianguli

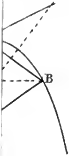


Fig. 83.

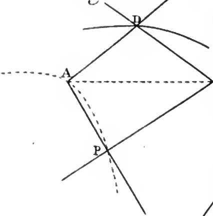


Fig. 84.

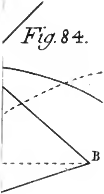


Fig. 85.

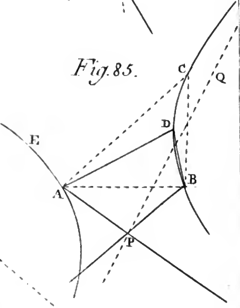
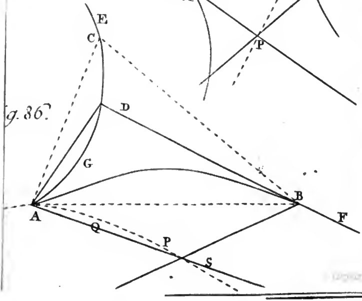


Fig. 86.



guli ABC rotetur tum Angulus CAB circa Verticem ſuum A; tum Angulorum reliquorum alteruter ABC circa Verticem ſuum B. Et, ubi crurum AC, BC concurſus C ſucceſſivè applicatur ad Puncta quatuor reliqua D, E, F, G, incidat concurſus crurum reliquorum AB, & BA in Puncta quatuor P, Q, R, S. Per Puncta illa quatuor & quintum A deſcribatur Sectio conica; & Anguli præfati CAB, CBA ita rotentur, ut crurum AB, BA concurſus percurrat Sectionem illam conicam, & concurſus reliquorum crurum AC, BC deſcribet Curvam propoſitam per Theorema ſecundum.

Si, vice Puncti C datur poſitione Recta BC, quæ Curvam deſcribendam tangit in B. Lineæ AD, AP coincident, & vice Anguli DAP habebitur Linea recta circa Polum A rotanda.

Si Punctum duplex A infinitè diſtat debebit Recta ad plagam Puncti illius perpetuò dirigi, & motu parallelo ferri interea dum Angulus ABC circa Polum B rotatur.

Deſcribi etiam poſſunt hæ Curvæ paulò aliter per Theorema tertium, ſed Deſcriptionem ſimpliciorem poſuiſſe ſufficit.

Eâdem Methodo Curvas tertii, quarti, & ſuperiorum Generum deſcribere licet, non omnes quidem, ſed quotquot ratione aliquâ commodâ per motum localem deſcribi poſſunt. Nam, Curvam aliquam ſecundi, vel ſuperioris, generis Punctum duplex non habentem commodè deſcribere Problema eſt inter difficiliora numerandum.

VII.

Conſtructio Æquationum per Deſcriptionem Curvarum.

Curvarum uſus in Geometriâ eſt, ut per earum interſectiones

Problemata ſolvantur. Proponatur Æquatio conſtruenda Dimenſionum novem.

$$x^9 * + bx^7 + cx^6 + dx^5 + ex^4 + fx^3 + gxx + hx + k = 0.$$
$$+ m$$

Ubi b, c, d, &c. ſignificant Quantitates quasvis datas ſignis ſuis + & — affectas. Aſſumatur Æquatio ad Parabolam cubicam $x^3 = y$, & Æquatio prior, ſcribendo y pro x^3, evadet

$$y^3 + bxyy + cyy + dxxy + exy + my + fx^3 + gxx + hx + k = 0.$$

Æquatio ad Curvam aliam ſecundi Generis. Ubi m, vel f deeſſe poteſt, vel pro lubitu aſſumi. Et per harum Curvarum deſcriptiones, & interſectiones dabuntur Radices Æquationis conſtruendæ. Parabolam cubicam ſemel deſcribere ſufficit.

Si Æquatio conſtruenda per defectum duorum Terminorum ultimorum hx, & k reducatur ad ſeptem Dimenſiones, Curva altera, delendo m, habebit Punctum Duplex in principio Abſciſſæ, & inde facilè deſcribi poteſt, ut ſupra.

Si Æquatio conſtruenda per defectum Terminorum trium ultimorum $gxx + hx + k$ reducatur ad ſex Dimenſiones, Curva altera, delendo f, evadet Sectio conica.

Et, ſi per defectum ſex ultimorum Terminorum, Æquatio conſtruenda reducatur ad tres Dimenſiones, incidetur in conſtructionem *Walliſianam* per Parabolam cubicam & Lineam rectam.

Conſtrui etiam poſſunt Æquationes per Hyperboliſmum Parabolæ cum Diametro. Ut, ſi conſtruenda ſit hæc Æquatio Dimenſionum novem Termino penultimo carens,

x+

$$\begin{array}{l} a + cxx + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + hx^7 + kx^8 + lx^9 = 0; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + m \end{array}$$

Aſſumatur Æquatio ad Hyperboliſmum illum $xxy = 1$, & ſcribendo y pro $\frac{1}{xx}$, Æquatio conſtruenda vertetur in hanc

$$ay^3 + cyy + dxyy + ey + fxy + m + g + hx + kxx + lx^3 = 0,$$

quæ Curvam ſecundi Generis deſignat, cujus deſcriptione Problema ſolvetur. Et Quantitatum m, ac g alterutra hic deeſſe poteſt, vel pro lubitu aſſumi.

Per Parabolam cubicam & Curvas tertii Generis conſtruuntur etiam Æquationes omnes Dimenſionum non pluſquam duodecim, & per eandem Parabolam & Curvas quarti Generis conſtruuntur omnes Dimenſionum non pluſquam quindecim; Et ſic deinceps in infinitum. Et Curvæ illæ tertii, quarti, & ſuperiorum Generum deſcribi ſemper poſſunt inveniendo eorum Puncta per Geometriam planam. Ut ſi conſtruenda ſit Æquatio

$$\begin{array}{l} x^{12} * + ax^{10} + bx^9 + cx^8 + dx^7 + ex^6 + fx^5 \\ \qquad + gx^4 + hx^3 + ixx + kx + l = 0, \end{array}$$

& deſcripta habeatur Parabola cubica; ſit Æquatio ad Parabolam illam cubicam $x^3 = y$, & ſcribendo y pro x^3, Æquatio conſtruenda vertetur in hanc

$$\begin{array}{lllll} y^4 + axy^3 & + cxxyy & + fxxy & + ixx = 0, \\ \quad + b & + dx & + gx & + kx \\ & + e & + h & + l \end{array}$$

quæ eſt Æquatio ad Curvam tertii Generis, cujus deſcriptione Problema ſolvetur. Deſcribi autem poteſt hæc Curva inveniendo ejus Puncta per Geometriam planam, propterea quod indeterminata Quantitas x non niſi ad duas Dimenſiones aſcendit.

OPUS-

Digitized by Google

OPUSCULUM V.

ISAACI

NEWTONI METHODUS DIFFERENTIALIS

Edita LONDINI 1711.

Digitized by Google

Digitized by Google

ISAACI NEWTONI METHODUS DIFFERENTIALIS.

PROP. I.

SI Figuræ curvilineæ Abſciſſa componatur ex Quantitate quâvis datâ A, *& Quantitate indeterminatâ* x, *& Ordinata conſtet ex datis quotcunque Quantitatibus* b, c, d, e, *&c. in totidem Terminos hujus Progreſſionis geometricæ* x, x^2, x^3, x^4, *&c. reſpectivè ductis, & ad Abſciſſæ Puncta totidem data erigantur Ordinatim applicatæ: dico quòd Ordinatarum Differentiæ primæ dividi poſſint per earum Intervalla, & Differentiarum ſic diviſarum Differentiæ dividi poſſint per Ordinatarum binarum Intervalla, & harum*

Digitized by Google

harum Differentiarum ſic diviſarum Differentiæ dividi poſſint per Ordinatarum ternarum Intervalla, & ſic deinceps in infinitum.

Etenim, ſi pro Abſciſſæ parte indeterminatâ x ponantur Quantitates quævis datæ p, q, r, s, t, &c. ſucceſſivè, & ad Abſciſſarum ſic datarum Terminos erigantur Ordinatæ α, β, γ, δ, ε, &c. Hæ Abſciſſæ, & Ordinatæ, & Ordinatarum Differentiæ diviſæ per Abſciſſarum Differentias, (quæ utique ſunt Ordinatarum Intervalla,) & Quotorum Differentiæ diviſæ per Ordinatarum alternarum Differentias, & ſic deinceps, exhibentur per Tabulam ſequentem.

Abſciſſæ	Ordinatæ
$A+p$	$A+bp+cp^2+dp^3+ep^4=\alpha$
$A+q$	$A+bq+cq^2+dq^3+eq^4=\beta$
$A+r$	$A+br+cr^2+dr^3+er^4=\gamma$
$A+s$	$A+bs+cs^2+ds^3+es^4=\delta$
$A+t$	$A+bt+ct^2+dt^3+et^4=\varepsilon$
Diviſor. Diff. Ord.	**Quoti per Diviſionem prodeuntes**
$p-q)\,\alpha-\beta$	$b+c\times\overline{p+q}+d\times\overline{pp+pq+qq}+e\times\overline{p^3+p^2q+pq^2+q^3}=\zeta$
$q-r)\,\beta-\gamma$	$b+c\times\overline{q+r}+d\times\overline{qq+qr+rr}+e\times\overline{q^3+q^2r+qr^2+r^3}=\eta$
$r-s)\,\gamma-\delta$	$b+c\times\overline{r+s}+d\times\overline{rr+rs+ss}+e\times\overline{r^3+r^2s+rs^2+s^3}=\theta$
$s-t)\,\delta-\varepsilon$	$b+c\times\overline{s+t}+d\times\overline{ss+st+tt}+e\times\overline{s^3+s^2t+st^2+t^3}=\kappa$
$p-r)\,\zeta-\eta$	$c+d\times\overline{p+q+r}+e\times\overline{pp+pq+qq+pr+qr+rr}=\lambda$
$q-s)\,\eta-\theta$	$c+d\times\overline{q+r+s}+e\times\overline{qq+qr+rr+qs+rs+ss}=\mu$
$r-t)\,\theta-\kappa$	$c+d\times\overline{r+s+t}+e\times\overline{rr+rs+ss+rt+st+tt}=\nu$
$p-s)\,\lambda-\mu$	$d+e\times\overline{p+q+r+s}=\xi$.
$q-t)\,\mu-\nu$	$d+e\times\overline{q+r+s+t}=\pi$.
$p-t)\,\xi-\pi$	$e=\sigma$.

PROP. II.

Iiſdem poſitis, & quòd numerus Terminorum b, c, d, e, *&c. ſit finitus, dico quòd Quotorum ultimus æqualis erit ultimo Terminorum* b, c, d, e, *&c., & quòd per Quotos reliquos dabuntur Termini reliqui* b, c, d, e, *&c. & his datis dabitur Linea cur-*

va:

væ generis Parabolici, quæ per Ordinatarum omnium Terminos tranſibit.

Etenim in Tabulâ ſuperiore Quotus ultimus σ æqualis erat Termino ultimo e. Et hic Terminus ductus in Summam datam $\overline{p+q+r+s}$; & ablatus de Quoto ξ relinquit Terminum penultimum d. Et Quantitates jam datæ $d \times \overline{p+q+r} + e \times \overline{pp+pq+qq+pr+qr+rr}$, ſi auferantur de Quoto λ, relinquunt Terminorum antepenultimum c. Et Quantitates jam datæ $c \times \overline{p+q} + d \times \overline{pp+pq+qq} + e \times \overline{p^3+ppq+pqq+q^3}$, ſi auferantur de Quoto ζ, relinquunt Terminum b. Et ſimili computo ſi plures eſſent Termini, colligerentur omnes per Quotorum Ordines totidem. Deinde Quantitates datæ $bp+cpp+dp^3+ep^4$, ſi ſubducantur de Ordinatâ primâ α, relinquunt Abſciſſæ Terminum primum A. Et Quantitas $A+bx+cx^2+dx^3+ex^4+$ &c. eſt Ordinata Curvæ generis Parabolici, quæ per Ordinatarum omnium datarum Terminos tranſibit, exiſtente Abſciſſâ $A+x$.

Ex his Propoſitionibus, quæ ſequuntur facilè colligi poſſunt.

PROP. III.

Si (Fig. 1.) *Recta aliqua* AA9 *in æquales quotcunque partes* AA2, A2A3, A3A4, A4A5, *&c. dividatur, & ad Puncta Diviſionum erigantur parallelæ* AB, A2B2, A3B3, *&c. Invenire Curvam geometricam generis Parabolici, quæ per omnium erectarum Terminos* B, B2, B3, *&c. tranſibit.*

Erectarum AB, A2B2, A3B3, &c. quære Differentias primas, b, $b2$, $b3$, &c.; ſecundas c, $c2$, $c3$, &c.; tertias d, $d2$, $d3$, &c; & ſic deinceps uſquedum veneris ad ultimam Differentiam, quæ hic ſit i.

Tunc, incipiendo ab ultimâ Differentiâ, excerpe medias Differentias in alternis Columnis, vel Ordinibus Differentiarum, & arithmetica Media inter duas medias reliquarum, Ordine pergendo uſque ad Seriem primorum Terminorum AB, A2B2, A3B3, &c. ſint hæc k, l, m, n, o, p, q, r, s, &c. quorum ultimus ſi-

 gni-

gnificet ultimam Differentiam; penultimus Medium arithmeticum inter duas penultimas differentias; antepenultimus mediam trium antepenultimarum Differentiarum, & ſic deinceps uſque ad primum, quod erit vel medius Terminorum A, A2, A3, &c. vel arithmeticus medius inter duos medios. Prius accidit, ubi numerum Terminorum A, A2, A3, &c. eſt impar; poſterius ubi par.

CAS. I.

In Caſu priori, ſit A5B5 iſte medius Terminus, hoc eſt, $A5B5 = k$; $\frac{b4+b5}{2} = l$; $c4 = m$; $\frac{d3+d4}{2} = n$; $e3 = o$, $\frac{f2+f3}{2} = p$; $g2 = q$; $\frac{h+h2}{2} = r$; $i = s$: Et, erectâ Ordinatim applicatâ PQ, dic $A5P = x$; & duc Terminos hujus Progreſſionis $1 \times \frac{x}{1} \times \frac{x}{2} \times \frac{xx-1}{3x} \times \frac{x}{4} \times \frac{xx-4}{5x} \times \frac{x}{6} \times \frac{xx-9}{7x} \times \frac{x}{8} \times \frac{xx-16}{9x} \times \frac{x}{10} \times \frac{xx-25}{11x} \times \frac{x}{12} \times \frac{xx-36}{13x}$ &c. in ſe continuò; & orientur Termini $1.\ x.\ \frac{xx}{2}.\ \frac{x^3-x}{6}.\ \frac{x^4-xx}{24}.\ \frac{x^5-5x^3+4x}{120}.\ \frac{x^6-5x^4+4xx}{720}.\ \frac{x^7-14x^5+49x^3-36x}{5040}.$ &c., per quos ſi Termini Seriei k, l, m, n, o, p, &c. reſpectivè multiplicentur, Aggregatum Factorum $k + xl + \frac{xx}{2}m + \frac{x^3-x}{6}n + \frac{x^4-xx}{24}o + \frac{x^5-5x^3+4x}{120} \times p +$ &c. erit longitudo Ordinatim applicatæ PQ.

CAS. II.

In Caſu poſteriori, ſint A4B4, A5B5 duo medii Termini, hoc eſt, ſit $\frac{A4B4+A5B5}{2} = k$; $b4 = l$; $\frac{c3+c4}{2} = m$; $d3 = n$: $e2 + e3 = o$; $f2 = p$; $\frac{g+g2}{2} = q$; & $h = r$. Et erectâ Ordinatim applicatâ PQ, biſeca A4A5 in O, & dicto $OP = x$, duc

Digitized by Google

duc Terminos hujus Progreſſionis $1 \times \frac{x}{1} \times \frac{xx - \frac{1}{4}}{2x} \times \frac{x}{3} \times \frac{xx - \frac{9}{4}}{4x} \times \frac{x}{5} \times \frac{xx - \frac{25}{4}}{6x} \times \frac{x}{7} \times \frac{xx - \frac{49}{4}}{8x}$, &c. in ſe continuò; & orientur Termini $1.\ x.\ \frac{4xx - 1}{8}.\ \frac{4x^3 - x}{24}.\ \frac{16x^4 - 40xx + 9}{384}$. &c., per quos ſi Termini Seriei k, l, m, n, o, p, q, &c. reſpectivè multiplicentur, Aggregatum Factorum $k + xl + \frac{4xx - 1}{8} m + \frac{4x^3 - x}{24} \times n + \frac{16x^4 - 40xx + 9}{384} o +$ &c. erit longitudo Ordinatim applicatæ P Q.

Sed hìc notandum eſt, quòd Intervalla $AA2$, $A2A3$, $A3A4$, &c. hìc ſupponantur eſſe Unitates, & quòd Differentiæ colligi debent auferendo inferiores Quantitates de ſuperioribus, $A2B2$ de AB; $A3B3$ de $A2B2$; $b2$ de b, &c., & faciendo, ut ſint $AB - A2B2 = b$; $A2B2 - A3B3 = b2$; $b - b2 = c$; &c., adeóque quando Differentiæ illæ hoc modo prodeunt negativæ, ſigna earum mutanda ſunt.

PROP. IV.

Si (Fig. 2.) *Recta aliqua in partes quotcunque inæquales* AA2, A2A3, A3A4, A4A5, *&c. dividatur, & ad Puncta Diviſionum erigantur parallelæ* AB, A2B2, A3B3, *&c. Invenire Curvam geometricam generis Parabolici, quæ per omnium erectarum Terminos* B, B2, B3, *&c. tranſibit.*

Sunto Puncta data B, B2, B3, B4, B5, B6, B7, &c. & ad Abſciſſam quamvis $AA7$ demitte Ordinatas perpendiculariter BA, B2A2, &c.

Et fac $\frac{AB - A2B2}{AA2} = b$; $\frac{A2B2 - A3B3}{A2A3} = b2$; $\frac{A3B3 - A4B4}{A3A4} = b3$;

Digitized by Google

$= b3$; $\frac{A4B4 - A5B5}{A4A5} = b4$; $\frac{A5B5 - A6B6}{A5A6} = b5$; $\frac{A6B6 - A7B7}{A6A7}$ $= b6$; $\frac{- A7B7 - A8B8}{A7A8} = b7$.

Deinde, $\frac{b - b2}{AA3} = c$; $\frac{b2 - b3}{A2A4} = c2$; $\frac{b3 - b4}{A3A5} = c3$; &c.

Tunc, $\frac{c - c2}{AA4} = d$; $\frac{c2 - c3}{A2A5} = d2$; $\frac{c3 - c4}{A3A6} = d3$; &c.

Et, $\frac{d - d2}{AA5} = e$; $\frac{d2 - d3}{A2A6} = e2$; $\frac{d3 - d4}{A3A7} = e3$; &c.

Sic pergendum eſt ad ultimam Differentiam.

Differentiis ſic collectis, & diviſis per Intervalla Ordinatim applicatarum; in alternis earum Columnis, ſive Seriebus, vel Ordinibus, excerpe medias, incipiendo ab ultimâ, & in reliquis Columnis excerpe Media arithmetica inter duas medias, pergendo uſque ad Seriem primorum Terminorum, AB, A2B2, &c. Sunto hæc *k*, *l*, *m*, *n*, *o*, *p*, *q*, *r*, &c., quorum ultimus Terminus ſignificet ultimam Differentiam; penultimus Medium arithmeticum inter duas penultimas; antepenultimus mediam trium antepenultimarum, &c. Et primus *k* erit media Ordinatim applicata, ſi numerus datorum Punctorum eſt impar; vel medium arithmeticum inter duas medias, ſi numerus eorum eſt par.

CAS. I.

In Caſu priori, ſit A4B4 iſta media Ordinatim applicata, hoc eſt ſit $A4B4 = k$; $\frac{b3 + b4}{2} = l$; $c3 = m$; $\frac{d2 + d3}{2} = n$; $e2 = o$; $\frac{f + f2}{2} = p$; $g = q$. Et erectâ Ordinatim applicatâ PQ, & in Baſi AA5 ſumpto quovis Puncto O, dic $OP = x$, & duc in ſe gradatim Terminos hujus Progreſſionis

$$1 \times \overline{x - OA4} \times \overline{x - \frac{OA3 + OA5}{2}} \times \frac{\overline{x - OA3} \times \overline{x - OA5}}{x - \frac{1}{2}\overline{OA3 + OA5}} \times$$

$$\overline{x - \frac{OA2 + OA6}{2}} \times$$ &c. & ortam Progreſſionem aſſerva; vel, quod

quod perinde eſt, duc Terminos hujus Progreſſionis

$$1 \times \overline{x - OA4} \times \overline{x - OA3} \times \overline{x - OA5} \times \overline{x - OA2} \times \overline{x - OA6} \times \overline{x - OA} \times \overline{x - OA7} \times \&c.$$

in ſe gradatim, & Terminos exinde ortos duc reſpectivè in Terminos hujus Progreſſionis

$$1.\ x - \frac{+OA3 + OA5}{2}.\ x - \frac{+OA2 + OA6}{2}.\ x - \frac{+OA + OA7}{2},$$

&c., & orientur Termini intermedii, totâ Progreſſione exiſtente

$$1.\ x - OA4.\ xx - \frac{+OA3 + 2OA4 + OA5}{2} x + \frac{OA3 + OA5}{2} \times OA4, \ \&c.$$

Vel dic $OA = \alpha$; $OA2 = \beta$; $OA3 = \gamma$; $OA4 = \delta$; $OA5 = \epsilon$; $OA6 = \zeta$; $OA7 = \eta$; $\frac{OA3 + OA5}{2} = \theta$; $\frac{OA2 + OA6}{2} = \chi$; $\frac{OA + OA7}{2} = \lambda$. Et ex Progreſſione

$$1 \times \overline{x - \delta} \times \overline{x - \gamma} \times \overline{x - \epsilon} \times \overline{x - \beta} \times \overline{x - \zeta} \times \overline{x - \alpha} \times \overline{x - \eta} \ \&c.$$

collige Terminos, quibus multiplicatis per $1.\ x - \theta,\ x - \chi,\ x - \lambda$, &c. collige alios Terminos intermedios, totâ Serie prodeunte

$$1;\ x - \delta,\ xx - \overline{\delta + \theta}\, x + \delta\theta,\ x^3 - \overline{\delta + 2\theta}\, xx + \overline{\gamma\epsilon + 2\delta\theta}\, x - \gamma\delta\epsilon, \ \&c.,$$

per cujus Terminos multiplica Series k, l, m, n, o, &c. Et Aggregatum Productorum $k + \overline{x - \delta} \times l + \overline{xx - \overline{\delta + \theta}\, x + \delta\theta} \times m +$ &c. erit longitudo Ordinatim applicatæ PQ.

C A S. II.

In Caſu poſteriori, ſint $A4B4$, $A5B5$ duæ mediæ Ordinatim applicatæ, hoc eſt, $\frac{A4B4 + A5B5}{2} = k$; $b4 = l$; $\frac{c3 + c4}{2} = m$; $d3 = n$; $\frac{e2 + e3}{2} = o$; $f2 = p$, &c. Et alternorum k, m, o, q, &c. Coefficientes orientur ex Multiplicatione Terminorum hujus Progreſſionis in ſe $1 \times \overline{x - OA4} \times \overline{x - OA5} \times \overline{x - OA3} \times \overline{x - OA6} \times \overline{x - OA2} \times \overline{x - OA7} \times$

$x -$

$\overline{x - OA} \times \overline{x - OA8}$, &c. Et reliquorum Coefficientes ex Multiplicatione horum per Terminos hujus Progreſſionis
$x - \frac{+OA4+OA5}{2}$, $x - \frac{+OA3+OA6}{2}$, $x - \frac{+OA2+OA7}{2}$, $x - \frac{+OA+OA8}{2}$, &c. Hoc eſt, erit $k + \overline{x - \frac{+OA4+OA5}{2}} \times l + \overline{xx - \overline{OA4+OA5}\,x + OA4 \times OA5} \times m$, &c. Ordinatim applicata PQ, vel PQ

$$\begin{array}{llllllll} = k + & x \times l + & x \times & + x \times m + & x \times & + x \times & + x \times n, & \&c. \\ & -\frac{1}{2}OA4 & -OA4 & -OA5 & -OA4 & -OA5 & -\frac{1}{2}OA3 & \\ & -\frac{1}{2}OA5 & & & & & -\frac{1}{2}OA6 & \end{array}$$

Sive dic $x - \frac{+OA4+OA5}{2} = \pi$, $\overline{x-OA4}\times\overline{x-OA5} = \rho$,

$\rho \times \overline{x - \frac{+OA3+OA6}{2}} = \sigma$, $\rho\times\overline{x-OA3}\times\overline{x-OA6}=\tau$,

$\tau\times\overline{x-\frac{+OA2+OA7}{2}}=\upsilon$, $\tau\times\overline{x-OA2}\times\overline{x-OA7}=\phi$,

$\phi\times\overline{x-\frac{+OA+OA8}{2}}=\chi$, $\phi\times\overline{x-OA}\times\overline{x-OA8}=\psi$.

Et erit $k+\pi l+\rho m+\sigma n+\tau o+\upsilon p+\phi q+\chi r+\psi s=PQ$.

PROP. V.

Datis aliquot Terminis Seriei cujuſcunque ad data Intervalla diſpoſitis, invenire Terminum quemvis intermedium quamproximè.

Ad Rectam poſitione datam erigantur Termini dati in dato Angulo, interpoſitis datis Intervallis, & per eorum Puncta extima, per Propoſitiones præcedentes, ducatur Linea curva generis Parabolici. Hæc enim continget Terminos omnes intermedios per Seriem totam.

PROP.

Digitized by Google

PROP. VI.

Figuram quamcunque curvilineam quadrare quamproximè, cujus Ordinatæ aliquot inveniri poſſunt.

Per Terminos Ordinatarum ducatur Linea curva generis Parabolici ope Propoſitionum præcedentium. Hæc enim Figuram terminabit, quæ ſemper quadrari poteſt, & cujus Area æquabitur Areæ Figuræ propoſitæ quamproximè.

SCHOLIUM.

Utiles ſunt hæ Propoſitiones ad Tabulas conſtruendas per Interpolationem Serierum, ut & ad ſolutiones Problematum, quæ à Quadraturis Curvarum dependent, præſertim ſi Ordinatarum Intervalla, & parva ſint, & æqualia inter ſe, & Regulæ computentur, & in uſum reſerventur pro dato quocunque numero Ordinatarum. Ut, ſi quatuor ſint Ordinatæ ad æqualia Intervalla ſitæ, ſit A ſumma primæ, & quartæ; B ſumma ſecundæ, & tertiæ; & R Intervallum inter primam, & quartam; & Ordinata nova in medio omnium erit $\frac{9B - A}{16}$, & Area tota inter primam & quartam erit $\frac{A + 3B}{8}R$.

Et nota, quòd ubi Ordinatæ ſtant ad æquales ab invicem diſtantias, ſumendo Summas Ordinatarum, quæ ab Ordinatâ mediâ hinc inde æqualiter diſtant, & duplum Ordinatæ mediæ, componitur Curva nova, cujus Area per pauciores Ordinatas determinatur, & æqualis eſt Areæ Curvæ prioris, quam invenire oportuit. Quinetiam, ſi pro Ordinatis novis ſumantur Summa Ordinatæ primæ, & ſecundæ; & ſumma tertiæ, & quartæ; & ſumma quintæ, & ſextæ; & ſic deinceps; vel ſi ſumantur Summa trium primarum Ordinatarum, & Summa trium proximarum, & Summa trium, quæ ſunt deinceps; vel ſi ſumantur Summæ quaternarum Ordinatarum, vel Summæ quinarum: Area Curvæ novæ æqualis erit Areæ Curvæ primò

primò propoſitæ. Et ſic, habitis Curvæ quadrandæ Ordinatis quotcunque, Quadratura ejus ad Quadraturam Curvæ alterius per pauciores Ordinatas reducetur.

Per data verò Puncta quotcunque non ſolùm curvæ Lineæ generis Parabolici, ſed etiam Curvæ aliæ innumeræ diverſorum generum duci poſſunt.

Sunto (*Fig.* 3.) CDE, FGH Curvæ duæ Abſciſſam habentes communem AB, & Ordinatas in eâdem Rectâ jacentes BD, BG; & Relatio inter has Ordinatas definiatur per Æquationem quamcunque. Dentur Puncta quotcunque, per quæ Curva CDE tranſire debet, & per Æquationem illam dabuntur Puncta totidem nova, per quæ Curva FGH tranſibit. Per Propoſitiones ſuperiores deſcribatur Curva FGH generis Parabolici, quæ per Puncta illa omnia nova tranſeat, & per Æquationem eandem dabitur Curva CDE, quæ per Puncta omnia primò data tranſibit.

OPUSCU-

OPUSCULA VI. & VII.

ISAACI NEWTONI SOLUTIONES PROBLEMATUM QUORUNDAM,

EDITÆ

IN TRANSAC. PHILOSOPH.

Menſ. Jan. &c., Ann. *1697*.

Num. 224. pag. 384.
Num. 225. pag. 424.
& Ann. 1716.
Num. 347. 399.

Digitized by Google

ART. I.

ISAACI NEWTONI EPISTOLA

MISSA AD

PRÆNOBILEM VIRUM

D. CAROLUM MONTAGUE

Armigerum, Scacarii Regii apud Anglos Cancellarii, & Societatis Regiæ Præſidem, ubi ſolvuntur duo Problemata Mathematica

A

JOHANNE BERNOULLIO

Math. Celeber. propoſita.

Accepi, Vir Ampliſſime, heſterno die duo Problematum à JOHANNE BERNOULLIO Mathematicorum acutiſſimo exemplaria, *Groningæ* edita in hæc verba

Acutiſſimis qui toto Orbe florent Mathematicis S. P. D.

JOHANNES BERNOULLI

MATH. P. P.

CUM compertum habeamus, vix quicquam eſſe, quod magis excitet generoſa ingenia ad moliendum quod conducit augendis Scientiis, quàm difficilium pariter & utilium Quæſtionum propoſitio-

poſitionem; quarum enodatione, tanquam ſingulari, ſi qua alia via, ad nominis claritatem perveniant, ſibíque apud Poſteritatem æterna extruant monumenta: Sic me nihil gratius Orbi Mathematico facturum ſperavi, quàm ſi, imitando exemplum tantorum Virorum MERSENNI, PASCALII, FERMATII, præſertim recentis illius Anonymi Ænigmatiſtæ *Florentini*, * aliorúmque, qui idem ante me fecerunt, præſtantiſſimis hujus ævi Analyſtis proponerem aliquod Problema, quo, quaſi lapide Lydio, ſuas Methodos examinare, vires intendere, &, ſi quid invenirent, nobiſcum communicare poſſent; ut quiſque ſuas exinde promeritas laudes à nobis, publicè id profitentibus, conſequeretur.

Factum autem illud eſt ante ſemeſtre in *Actis Lipſ. m. Jun.* pag. 269, ubi tale Problema propoſui, cujus utilitatem cum jucunditate conjunctam videbunt omnes, qui cum ſucceſſu ei ſe applicabunt. Sex menſium ſpatium à primâ publicationis die Geometris conceſſum eſt, intra quod, ſi nulla Solutio prodiret in lucem, me meam exhibiturum promiſi. Sed ecce elapſus eſt terminus, & nihil Solutionis comparuit; niſi quod Celeb. LEIBNITIUS, de profundiore Geometriâ præclarè meritus, me per litteras certiorem fecerit, ſe jam feliciter diſſolviſſe nodum pulcherrimi hujus, uti vocabat, & inauditi antea Problematis; inſimúlque humaniter rogavit, ut præſtitutum limitem ad proximum Paſcha extendi paterer; quo interea apud Gallos, Italóſque, idem illud publicari poſſet, nullúſque adeò ſupereſſet locus ulli de anguſtiâ termini querelæ. Quam honeſtam petitionem non ſolùm indulſi, ſed ipſe hanc prorogationem promulgare decrevi; viſurus num qui ſint, qui nobilem hanc & arduam Quæſtionem aggreſſuri, poſt longum temporis intervallum, tandem Enodationis compotes fierent. Illorum interim in gratiam, ad quorum manus *Acta Lipſienſia* non perveniunt, propoſitionem hìc repeto.

PRO-

* *Vincentius* VIVIANI Ann. 1692. Ænigma Geometricum propoſuit, de miro opificio Teſtudinis quadrabilis Hemiſphericæ; Videantur *Acta Eruditorum* hujus anni, menſe Junio, *pag.* 274. vel Vita VIVIANI in Hiſt. Acad. Reg. Scient. Pariſ. Ann. 1703.

PROBLEMA
MECHANICO-GEOMETRICUM
De Lineâ celerrimi deſcenſûs.

Determinare Lineam curvam data duo Puncta, in diverſis ab Horizonte diſtantiis & non in eâdem Rectâ verticali poſita, connectentem, ſuper quâ mobile, propriâ gravitate decurrens & à ſuperiori Puncto moveri incipiens, citiſſimè deſcendat ad Punctum inferius.

SENSUS Problematis hic eſt: Ex infinitis Lineis, quæ duo illa data Puncta conjungunt, vel ab uno ad alterum duci poſſunt, eligatur illa, juxta quam, ſi incurvetur lamina tubi canaliſve formam habens, ut ipſi impoſitus globulus & liberè dimiſſus, iter ſuum ab uno Puncto ad alterum emetiatur tempore breviſſimo.

Ut verò omnem ambiguitatis anſam præcaveamus; ſcire B. L. volumus, nos hic admittere GALILÆI hypotheſin, de cujus veritate, ſepoſitâ reſiſtentiâ, jam nemo eſt ſaniorum Geometrarum qui ambigat, *Velocitates, ſcilicet, acquiſitas, Gravium cadentium eſſe in ſubduplicatâ Ratione Altitudinum emenſarum*; quamquam aliàs noſtra ſolvendi Methodus univerſaliter ad quamvis aliam hypotheſin ſeſe extendat.

Cùm itaque nihil obſcuritatis ſuperſit, obnixè rogamus omnes & ſingulos hujus ævi Geometras, accingant ſe promtè, tentent, diſcutiant quicquid in extremo ſuarum Methodorum receſſu abſconditum tenent. Rapiat qui poteſt præmium, quod Solutori paravimus; non quidem auri, non argenti ſummam, quo abjecta tantùm & mercenaria conducuntur ingenia; à quibus ut nihil laudabile, ſic nihil, quod Scientiis fructuoſum, expectamus; ſed cùm Virtus ſibi ipſi ſit merces pulcherrima, atque Gloria immenſum habeat calcar, offerimus præmium, quale convenit ingenui ſanguinis Viro, con-

ſertum ex honore, laude, & plauſu; quibus magni noſtri Apollinis perſpicacitatem, publicè & privatim, ſcriptis & dictis coronabimus, condecorabimus, & celebrabimus.

Quòd ſi verò feſtum Paſchatis præterierit, nemine deprehenſo, qui Quæſitum noſtrum ſolverit; nos quæ ipſi invenimus publico non invidebimus: Incomparabilis enim Leibnitius Solutiones tum ſuam, tum noſtram, ipſi jam pridem commiſſam, protinus, ut ſpero, in lucem emittet; quas ſi Geometræ, ex penitiori quodam fonte petitas perſpexerint, nulli dubitamus, quin anguſtos vulgaris Geometriæ limites agnoſcant, noſtráque proin inventa tanto pluris faciant, quanto pauciores eximiam noſtram Quæſtionem ſoluturi extiterint, etiam inter illos ipſos, qui per ſingulares, quas tantoperè commendant, Methodos, interioris Geometriæ latibula non ſolùm intimè penetraſſe, ſed etiam ejus pomœria, Theorematibus ſuis aureis, nemini, ut putabant, cognitis, ab aliis tamen jam longè priùs editis, mirum in modum extendiſſe gloriantur.

PROBLEMA ALTERUM

PURE GEOMETRICUM

Quod priori ſubnectimus, & Strenæ loco Eruditis proponimus.

AB Euclidis tempore vel Tyronibus notum eſt, ductam utcunque à Puncto dato rectam Lineam, à Circuli Peripheriâ ita ſecari, ut Rectangulum duorum Segmentorum, inter Punctum datum & utramque Peripheriæ partem interceptorum, ſit eidem conſtanti perpetuò æquale. Primus ego oſtendi, in eodem *Actorum Jun.* pag. 265, hanc proprietatem infinitis aliis Curvis convenire, illámque adeò Circulo non eſſe eſſentialem: Arreptâ hinc occaſione, propoſui Geometris determinandam Curvam, vel Curvas, in quibus non Rectangulum, ſed Solidum ſub uno & Quadrato alterius Segmentorum æquetur ſemper eidem: ſed à nemine hactenus ſolvendi modus prodiit; exhibebimus eum, quandocumque deſiderabitur. Quoniam autem non niſi per Curvas tranſcendentes Quæſito

ſatisfacimus;

ſatisfacimus; en aliud, cujus Solutio per merè algebraicas in noſtrâ eſt poteſtate.

Quæritur Curva ejus proprietatis, ut duo illa Segmenta, ad quamcunque Potentiam datam elevata & ſimul ſumta, faciant ubique unam eandémque Summam.

Caſum ſimpliciſſimum, exiſtente ſcilicet numero Potentiæ 1, ibidem in *Actis*, pag. 266. jam ſolutum dedimus; generalem verò Solutionem, quam etiamnum premimus, Analyſtis eruendam relinquimus.

Dabam Groningæ, ipſis Cal. Jan. 1697.

Hactenus BERNOULLIUS; Problematum verò Solutiones ſunt hujus modi.

A dato Puncto A (*Fig.* 1.) ducatur Recta infinita APCZ Horizonti parallela & ſuper eâdem Rectâ deſcribatur, tum Cyclois quæcunque AQP Rectæ ABC ductæ, & ſi opus ſit, (productæ) occurrens in Puncto Q, tum Cyclois alia ABC, cujus Baſis, & Altitudo ſit ad prioris Baſem & Altitudinem reſpectivè, ut AB ad AQ. Et hæc Cyclois noviſſima tranſibit per Punctum B, & erit curva illa Linea, in quâ Grave à Puncto A ad Punctum B vi Gravitatis ſuæ citiſſimè perveniet. Q. E. I.

PROBLEMA II.

Problema alterum, ſi rectè intellexi, (nam, quæ in *Actis Lipſ.* ab Auctore citantur ad id ſpectantia nondum vidi,) ſic proponi poteſt. Quæritur (*Fig.* 2.) Curva KIL eâ lege, ut ſi Recta PKL à dato quodam Puncto P, ceu Polo, utcunque ducatur, & eidem Curvæ in Punctis duobus K, & L occurrat, Poteſtates duorum ejus Segmentorum PK, & PL à dato illo Puncto P ad occurſus illos ductorum, ſi ſint æquè altæ, [id eſt, vel Quadrata, vel Cubi, vel Quadrato-quadrata, &c:] datam Summam PK*q* + PL*q* vel PK *cub.* + PL *cub*, &c: (in omni Rectæ illius poſitione) conficiant.

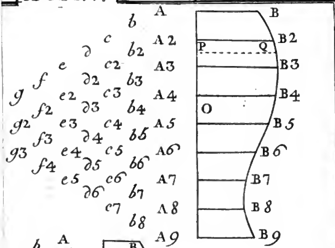
SOLUTIO.

Per datum quodvis Punctum A ducatur Recta quævis infinita po-

ſitione data ADB Rectæ mobili PKL occurrens in D, & nominentur AD, x; & PK, vel PL, y; ſintque Q, & R Quantitates ex Quantitatibus quibuſcunque datis, & Quantitate x quomodocunque conſtantes, & Relatio inter x, & y, definiatur per hanc Æquationem $yy + Qy + R = 0$. Et ſi R ſit Quantitas data, Rectangulum ſub Segmentis PK & PL dabitur. Si Q ſit Quàntitas data, Summa Segmentorum illorum (ſub ſignis propriis conjunctorum) dabitur. Si $QQ - 2R$ datur, Summa Quadratorum, ($PKq + PLq$,) dabitur. Si $Q^3 - 3QR$ data ſit Quantitas, Summa Cuborum ($PK\,cub. + PL\,cub.$) dabitur. Si $Q^4 - 4QQR + 2RR$ data ſit Quantitas, Summa Quadrato-quadratorum ($PKqq + PLqq$) dabitur. Et ſic deinceps in infinitum. Efficiatur itaque ut R, Q, $QQ - 2R$, $Q3 - 3QR$, &c. datæ ſint Quantitates, & Problema ſolvetur. Q. E. F.

Ad eundem modum Curvæ inveniri poſſunt, quæ tria, vel plura abſcindent Segmenta, ſimiles proprietates habentia. Sit Æquatio $y^3 + Qyy + Ry + S = 0$, ubi Q, R, & S, Quantitates ſignificant ex Quantitatibus quibuſcunque datis, & Quantitate x utcunque conſtantes, & Curva abſcindet Segmenta tria. Et ſi S data ſit Quantitas contentum Solidorum illorum trium dabitur. Si Q ſit Quantitas data Summa trium illorum dabitur. Si $QQ - 2R$ ſit data Quantitas, Summa Quadratorum ex tribus illis dabitur.

OPUS-



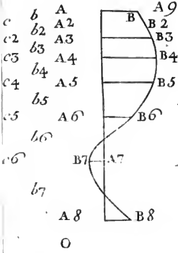
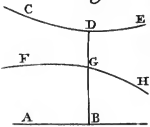


Fig. 3.



OPUSC. VI.

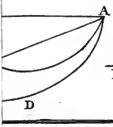
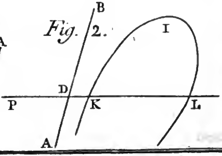


Fig. 2.



OPUSCULUM VI.

ART. II.

De Ratione Temporis, quo Grave labitur per Rectam data duo Puncta conjungentem ad Tempus breviſſimum, quo, vi Gravitatis, tranſit ab horum uno ad alterum per Arcum Cycloidis.

THEOREMA.

SI (*Fig.* 3. hujus Opuſculi) *in* Cycloide AVD, *cujus Baſis* AD *eſt Horizonti parallela*, *Vertice* V *deorſum ſpectante*, *ex* A *ducatur utcunque Recta* AB Cycloidi *occurrens in* B, *ex quo ducatur Recta* BC *Curvæ* Cycloidis BD *in* B *normalis*, *ad quam ex* A *demittatur perpendicularis Recta* AC. *Dico Tempus*, *quo Grave è quiete cadens ex* A, *vi ſua Gravitatis*, *decurrit Rectam* AB, *eſſe ad Tempus*, *quo percurrit Curvam* AVB, *ſicut Recta* AB *ad Rectam* AC. Tranſ. Philoſ. Menſ. Februar. Ann. 1697. Num. 225. pag. 424.

Per B ducatur BL parallela *Cycloidis* Axi VE; & BK, Baſi AD parallella occurrens Axi in G, &, Circulo ſuper Diametrum EV deſcripto, in F & H; *Cycloidi* denique in K. Ducatur Recta EF, quæ, ex *Cycloidis* naturâ, parallela eſt Rectæ BC. Unde BM eſt æqualis EF, & EM æqualis BF; quæ, propter *Cycloidem*, æquatur Arcui VF; & proinde AM eſt æqualis Arcui EHVF.

Per Prop. XXV. Part. II. *Horologii Oſcillatorii* Hugenii, Tempus, quo Grave è quiete cadens percurrit AV, eſt ad Tempus Caſûs per EV, ut Semicircumferentia ad Diametrum; &, per dictæ Partis Propoſitionem ultimam, Tempus, quo Grave percurrit VB, poſt decurſam AV, (nempe æquale Tempori, quo Grave percurrit KV, poſt decurſam AK,) eſt ad Tempus Lapſûs per AV, ſicut Arcus VF ad ſemicircumferentiam; adeòque ad

 Tempus

Tempus Caſûs per EV, ſicut FV ad Diametrum, Quare Tempus, quo Grave percurrit Curvam AVB, eſt ad Tempus Caſûs per EV, ſicut Arcus EHVF, ad Diametrum EV. Sed, Tempus Caſûs per EV, eſt ad Tempus Caſus per LB, (ſive EG,) ſicut EV ad EF. Igitur, ex æquo, Tempus, quo Grave percurrit AVB, eſt ad Tempus Caſûs per LB, ſicut Arcus EHVF ad Subtenſam EF; hoc eſt ut Recta AM, ad Rectam MB. Rurſus, Tempus Caſûs per LB eſt ad Tempus Lapſûs per AB, ut LB ad AB. Ergo, Ratio Temporis, quo Grave percurrit AVB, ad Tempus, quo percurrit AB, componitur ex Ratione AM ad MB, & Ratione LB ad BA; adeóque æqualis eſt Rationi $AM \times LB$ ad $MB \times BA$. Sed $AM \times LB$ eſt æquale $MB \times AC$; quia utrumque æquatur duplo Trianguli ABM. Et igitur, Tempus, quo Grave è quiete cadens percurrit Curvam *Cycloidis* AVB, eſt ad Tempus, quo percurrit Rectam AB, ſicut $MB \times AC$, ad $MB \times BA$; id eſt, ſicut AC ad AB. *Q. E. D.*

Similitérque procedet Demonſtratio, ſi Punctum B, ſit inter A & V.

OPUS-

OPUSCULUM VII.

PROBLEMATIS

Olim in Actis Eruditorum Lipſiæ *propoſiti*

SOLUTIO GENERALIS.

IN *Actis Eruditorum* pro menſe *Octobri* Anni 1698 pag. 471. D. *Johannes* Bernoullius hæc ſcripſit. Methodum, quam optaveram generalem ſecandi Curvas ordinatim poſitione datas, ſive algebraïcas, ſive tranſcendentales, in Angulo recto, ſive obliquo, invariabili, ſive datâ lege variabili, tandem ex voto erui: cui, Leibnitio approbatore, ne γρῦ addi poteſt ad ulteriorem perfectionem, & vel ideo tantùm quòd perpetuò ad Æquationem deducat: in quâ ſi interdum indeterminatæ ſunt inſeparabiles, Methodus non ideo imperfectior eſt, non enim hujus ſed alius eſt Methodi indeterminatas ſeparare: Rogamus igitur Fratrem ut velit ſuas quoque vires exercere in re tanti momenti. Suſcepti laboris non pœnitebit, ſi felix ſucceſſus fructu jucundo compenſaverit. Scio relicturum ſuum, quem nunc fovet, modum, qui in pauciſſimis tantùm exemplis adhiberi poteſt.

Tranſact. Philoſ. 1716. Janu. Fevr. & Mart. N°. 347. pag. 399.

Hi tres Viri Celeberrimi ſeſe, jam ab annis quatuor vel quinque, circiter, in ſolvendis hujuſmodi Problematibus exercuerant. Abſque ſpiritu divinandi eandem Solutionem cum *Bernoullianâ* tradere difficile fuerit. Sufficit quòd Solutio ſequens ſit generalis, & ad Æquationem ſemper deducat.

PROBLEMA.

Quæritur Methodus generalis inveniendi Seriem Curvarum, quæ Curvas in Serie aliâ quâcumque datâ conſtitutas, ad Angulum, vel datum, vel datâ lege variabilem ſecabunt.

SOLUTIO.

Natura Curvarum ſecandarum dat Tangentes earundem ad interſectionum Puncta quæcunque: & Anguli interſectionum dant Perpendicula Curvarum ſecantium; & Perpendicula duo coeuntia, per concurſum ſuum ultimum, dant Centrum Curvaminis Curvæ ſecantis ad Punctum interſectionis cujuſcunque. Ducatur Abſciſſa in ſitu quocumque commodo, & ſit ejus Fluxio Unitas; & poſitio Perpendiculi dabit Fluxionem primam Ordinatæ ad Curvam quæſitam pertinentis; & Curvamen hujus Curvæ dabit Fluxionem ſecundam ejuſdem Ordinatæ. Et ſic Problema ſemper deducetur ad Æquationes. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Non hujus, ſed alius eſt Methodi Æquationes reducere, & indeterminatas ſeparare, abſolutè, ſi fieri poſſit, ſin minus, per Series infinitas. Problema hocce, cum nullius fere ſit uſûs, in *Actis Eruditorum* annos plures neglectum & inſolutum manſit. Et eâdem de cauſâ Solutionem ejus non ulteriùs proſequor.

OPUSCU-

OPUSCULA VIII. & IX.

EXCERPTA

EX EPISTOLIS

AUT

ISAACI NEWTONI

AUT

AD EUM SPECTANTIBUS.

Editis in

COMMERCIO EPISTOLARI

COLLINSII &c.

Digitized by Google

OPUSCULUM VIII.

EXCERPTUM EX EPISTOLA

ISAACI NEWTONI

AD

COLLINSIUM

A. D. 10. Decemb. Ann. 1672.

Com. Epiſtol. ſecund, Edit. pag. 104. & ſeq. Num. XXVI.

EX animo gaudeo D. Barovii amici noſtri Reverendi Lectiones Mathematicis exteris adeò placuiſſe, neque parum me juvat intelligere eos [Slusium & Gregorium] in eandem mecum incidiſſe ducendi Tangentes Methodum. Qualem eam eſſe conjiciam ex hoc exemplo percipies. Pone (*Vide Figuram hujus Opuſculi*) CB Applicatam ad AB in quovis Angulo dato terminari ad quamvis Curvam AC; & dicatur $AB = x$, & $BC = y$; habitudóque inter x & y exprimatur qualibet Æquatione, puta, $x^3 - 2xxy + bxx - bbx + byy - y^3 = 0$, quâ ipſâ determinatur Curva. Regula ducendi Tangentem hæc eſt; multiplica Æquationis Terminos per quamlibet Progreſſionem arithmeticam juxta Dimenſiones y, puta

$$\begin{array}{cccccc} x^3 & -\,2xxy & +\,bxx & -\,bbx & +\,byy & -\,y^3, \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

ut & juxta Dimenſiones x, puta,

$$\begin{array}{cccccc} x^3 & -\,2xxy & +\,bxx & -\,bbx & +\,byy & -\,y^3. \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Prius Productum erit Numerator, & poſterius, diviſum per x, Denominator Fractionis, quæ exprimet Longitudinem BD, ad cujus extremitatem D ducenda eſt Tangens CD: eſt ergo Longitudo BD

$$= \frac{-2xxy + 2byy - 3y^3}{3xx - 4xy + 2bx - bb}$$

Hoc

Hoc eſt unum particulare, vel Corollarium potiùs Methodi generalis, quæ extendit ſe, citra moleſtum ullum Calculum, non modò ad ducendum Tangentes ad quaſvis Curvas, ſive Geometricas, ſive Mechanicas, vel quomodocunque rectas Lineas, aliáſve Curvas reſpicientes; verùm etiam ad reſolvendum alia abſtruſiora Problematum genera de Curvitatibus, Areis, Longitudinibus, Centris Gravitatis Curvarum, &c. Neque, (quemadmodum HUDDENII Methodus de *Maximis*, & *Minimis*,) ad ſolas reſtringitur Æquationes illas, quæ Quantitatibus ſurdis ſunt immunes.

Hanc Methodum intertexui alteri iſti, quâ Æquationum Exegeſin inſtituo, reducendo eas ad Series infinitas. Memini me ex occaſione aliquando narrâſſe D. BARROVIO, edendis Lectionibus ſuis occupato, inſtructum me eſſe hujuſmodi Methodo Tangentes ducendi: Sed neſcio quo diverticulo ab eâ ipſi deſcribendâ fuerim avocatus.

SLUSII Methodum Tangentes ducendi brevi publicè prodituram confido: quamprimùm advenerit, exemplar ejus ad me tranſmittere ne grave ducas.

OPUS-

OPUSCULUM IX.

ART. I.

EXCERPTUM

Ex Epiſtolâ OLDEMBURGII ad SLUSIUM.

In quâ continetur

PARS EPISTOLÆ

A B

ISAACO NEWTONO

A D

Eundem OLDEMBURGIUM datæ.

A.D. 10. Julii 1673.

EN tibi, Vir illuſtriſſime, impreſſum modum tuum demonſtrandi Methodum tuam ducendi Tangentes ad quaſlibet Curvas, quemadmodum poſtremis tuis litteris eum mihi communicaveras: ſubticui viri nomen, offenſionis evitandi cauſâ. ſcripſit mihi D. NEWTONUS in hanc ſententiam. Ibidem pag. 107. Num. XXIX.

Ex priori tuâ Epiſtolâ ſubdubitabam, exiſtimarétne celeberrimus SLUSIUS per ea, quæ ipſi de me ſcripſeras, me mihi tribuere Methodum ipſius ducendi Tangentes; donec intelligerem à D.

Digitized by Google

Collinsio, te ipſi ſignificaſſe, eam, ex opinione tuâ, ſeriùs hìc inventam fuiſſe. Tibi quippe videtur, eam D. Slusio perſpectam fuiſſe aliquot annis priuſquàm ederet Meſolabum ſuum, proïndéque antequàm ego eam intelligerem. At, ſi res ſecus ſe haberet, cùm tamen eam primus communicaverit Amicis ſuis & litterato Orbi, jure merito ipſi debetur. Quoad Methodos illas, eædem ſunt, quanquam, crediderim, ex principiis diverſis derivatæ. Neſcio tamen num ipſius principia eam largiantur adeò generalem ac mea; quæ ad Æquationes Terminis ſurdis affectas ſe extendunt, abſque eorum ad aliam formam Reductione.

Hæc ille, quæ in bonam partem à te acceptum iri confido.

ART. II.

EXCERPTUM

Ex Epiſtolâ Leibnitii ad Oldemburgium

A.D. 30. Martii An. 1675.

Ibidem pag. 117. Num. XXXV.

SCribis clariſſimum Newtonum veſtrum habere Methodum exhibendi Quadraturas omnes, omniúmque curvarum Superficierum & Solidorum ex revolutione genitorum Dimenſiones, & Centrorum Gravitatis inventiones, per appropinquationes ſcilicet, ita enim interpretor. Quæ Methodus ſi eſt univerſalis & commoda, meretur æſtimari; nec dubito fore ingenioſiſſimo Auctore dignam. Addis tale quid Gregorio innotuiſſe.

ART.

ART. III.

EXCERPTUM

Ex Epiſtolâ Oldemburgii ad Leibnitium, quâ ſuperiori reſpondetur.

A. D. 15. Aprilis An. 1675.

D. Collinsius, præmiſſâ ſalute, quæ ſequuntur remittit. Primo Clariſſimum Gregorium in poſtremâ ſuâ ad Illuſtrem Hugenium reſponſione, Seriem ſuppeditâſſe ad Semicircumferentiam Circuli inveniendam, quæ talis. Ibidem pag. 118. Num. XXXVI.

Pone Radium $= r$, dimidium Latus Quadrati inſcripti Circulo $= d$, & Differentiam inter Radium & Latus Quadrati $= e$, Semicircumferentia æqualis eſt

$$\frac{4rr}{2d - \frac{e}{3} - \frac{ee}{90d} - \frac{e^3}{756dd} - \frac{2e^4}{113400d^3} - \frac{260e^5}{7484400d^4} - \&c.}$$

in infinitum; quæ Series adeò produci poteſt, ut à Semicircumferentiâ minùs differat, quàm ulla Quantitas aſſignabilis.

Editum hoc fuit à D. Gregorio poſtquam D. Mercatoris Logarithmotechnia jam extabat, quæ, quàm-primùm viderat lucem, ad D. Barrovium à me fuit tranſmiſſa; qui obſervato in ea infinitæ Seriei uſu ad Logarithmos conſtruendos, reſcribebat Methodum illam jam aliquandiu excogitatam fuiſſe à Succeſſore ſuo Newtono, omnibúſque Curvis, earúmque portionibus geometricis, æquè ac mechanicis, univerſim applicatam, cujùs rei ſpecimina quædam ſubjecit, videlicet.

Poſitâ pro Radio Unitate, datóque x pro Sinu, ad inveniendum z Arcum Series hæc eſt $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152} \times x^9$ &c. in infinitum. Et, extractâ Radice hujus Æquationis, Metho-

thodo ſymbolicâ, ſi dederis z pro Arcu, ad inveniendum x Sinum Series hæc eſt $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880} \times z^9 -$ &c. Atque hæc ſeries facilè continuatur in infinitum. Prioris beneficio ex Sinu triginta Graduum Ceulenii numeri facilè ſtruuntur. &c.

Conſimiliter, ſi ponas Radium R, & B Sinum Arcûs: Zona (*vide Figuram hujus Opuſculi*), inter Diametrum & Chordam illi parallelam eſt $= 2RB - \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{B^9}{576R^7} - \frac{7B^{11}}{1408R^9}$ —, &c. Atque eadem Series, mutatis ſignis Termini ſecundi, quarti, & ſexti, &c., inſervit aſſignandæ Areæ zonæ æquilateris Hyperbolæ, videlicet $AFGB = 2RB + \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} + \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7} + \frac{7B^{11}}{1408R^9} -$ &c.

ART. IV.

EXCERPTUM

Ex Epiſtolâ Oldemburgii ad Leibnitium

A. D. 24. Junii 1675.

Ibidem pag. 123. Num. XL.

Dominus Newtonus, beneficio Logarithmorum graduatorum in Scalis παραλλήλως locandis ad diſtantias æquales, vel Circulorum concentricorum eo modo graduatorum adminiculo, invenit Radices Æquationum. Tres Regulæ rem conficiunt pro Cubicis, quatuor pro Biquadraticis. In harum diſpoſitione reſpectivi Coefficientes omnes jacent in eâdem Lineâ rectâ; à cujus Puncto tam remoto à primâ Regulâ ac Scalæ graduatæ ſunt ab invicem, Linea recta iis ſuperextenditur, unà cum præſcriptis conformibus genio Æquationis, quâ in Regularum unâ datur Poteſtas pura Radicis quæſitæ.

ART. V.

Digitized by Google

ART. V.

EXCERPTUM

Ex Epiſtolâ LEIBNITII ad OLDEMBURGIUM

Pariſiis. A. D. 12. Maii 1676.

CUM *Georgius* MOHR *Danus*, in Geometriâ & Analyſi verſatiſſimus, nobis attulerit communicatam ſibi à Doctiſſimo COLLINSIO veſtro expreſſionem Relationis inter Arcum & Sinum per infinitas Series ſequentes:

Poſito Sinu $= x$, Arcu $= z$, Radio $= 1$.

$$z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9, \text{ \&c.}$$

$$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9, \text{ \&c.}$$

Hæc, * inquam, cùm nobis attulerit ille, quæ mihi valde ingenioſa videntur, & poſterior inprimis Series elegantiam quandam ſingularem habeat, ideo rem gratam mihi feceris, Vir Clariſſime, ſi Demonſtrationem tranſmiſeris, ... Oro, ut Clariſſimo COLLINSIO multam à me ſalutem dicas: is facilè tibi materiam ſuppeditabit ſatisfaciendi deſiderio meo.

* Hæ Series NEWTONI ſunt. Vide Articulum ſuperiorem, & Opuſc. I pag 22. hujus &c. & ratio inveniendorum Coefficientium, quæ infra traditur, item Newtoniana eſt. Opuſc. I. pag. 23. hujus.

OPUS-

Digitized by Google

OPUSCULUM IX.

ART. VI.

EXCERPTUM

Ex Epiſtolâ COLLINSII ad OLDEMBURGIUM, quâ ſuperiori reſpondetur.

A. D. 14. Junii 1676

Ibidem pag. 126. 127. Num. XLV.

RESPONDEAS, ſi placet, ad ea quæ quærit D. LEIBNITIUS in Litteris ejus 12 Maii datis, Seriei primæ numeros Coefficientes $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{5}{112}$, $\frac{35}{1152}$, hoc modo compoſitos eſſe, $\frac{1\times 1}{2\times 3} = \frac{1}{6}$, & $\frac{1}{6}\times\frac{3\times 3}{4\times 5} = \frac{3}{40}$, & $\frac{3}{40}\times\frac{5\times 5}{6\times 7} = \frac{5}{112}$, & $\frac{5}{112}\times\frac{7\times 7}{8\times 9} = \frac{35}{1152}$, & $\frac{35}{1152}\times\frac{9\times 9}{10\times 11} = \frac{63}{2816}$, atque ita deinceps in infinitum: unde intelligi poſſit hanc Seriem elegantiâ minimè cedere converſæ ejuſdem, quæ tamen illi magis arridet. Meditata ejus de eodem Argumento, cùm fundamentis planè diverſis innitantur, non poſſunt nobis non eſſe acceptiſſima; atque exoptamus ea fidem noſtram exſuperare poſſe. Hujus autem Methodi ea eſt præſtantia, ut, cùm tam latè pateat, ad nullam hæreat difficultatem. GREGORIUM autem aliósque in eâ fuiſſe opinione arbitror, ut quicquid uſpiam antea de hac re innotuit, quaſi dubia diluculi lux fuit, ſi cum meridianâ claritate conferatur.

OPUS-

OPUSCULUM X.

ISAACI NEWTONI EPISTOLA PRIOR

AD

OLDEMBURGIUM.

Edita in Commercio Epistolico. &c.

Digitized by Google

OPUSCULUM X.

Epiſtola prior ISAACI NEWTONI *Matheſeos Profeſſoris in Celeberrimâ Academiâ* CANTABRIGIENSI; *ad* HENRICUM OLDEMBURGIUM, *Regalis* SOCIETATIS LONDINI *Secretarium*; 13. *Junii* 1676. *cum Illuſtriſſimò Viro* GODOFREDO GUILIELMO LEIBNITIO (*eo mediante*) *communicanda. Literis* OLDEMBURGII, (26. *Junii*) ad LEIBNITIUM *miſſa*.

QUanquam D. LEIBNITII modeſtia, in Excerptis, quæ ex Epiſtolâ ejus ad me nuper miſiſti, Noſtratibus multùm tribuat circa ſpeculationem quandam *Infinitarum Serierum*, de quâ jam cæpit eſſe rumor; nullus dubito tamen, quin ille, non tantùm, (quod aſſerit,) Methodum reducendi Quantitates quaſcunque in ejuſmodi Series, ſed & varia Compendia, fortè noſtris ſimilia, ſi non & meliora, adinvenerit. Comm. Epiſt Secun. Edit. pag. 131. Num. XLVIII.

Quoniam tamen ea ſcire pervelit, quæ ab Anglis hac in re inventa ſunt, & ipſe ante annos aliquot in hanc Speculationem inciderim; ut votis ejus aliquâ ſaltem ex parte ſatisfacerem, nonnulla eorum, quæ mihi occurrerunt, ad te tranſmiſi.

Fractiones in infinitas Series reducuntur per Diviſionem; & Quantitates Radicales per Extractionem Radicum: perinde inſtituendo Operationes iſtas in Speciebus, ac inſtitui ſolent in Decimalibus Numeris. Hæc ſunt Fundamenta harum Reductionum.

Sed Extractiones Radicum multùm abbreviantur per hoc *Theorema*.

$$\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \&c.$$

Ubi $P+PQ$ ſignificat Quantitatem, cujus Radix, vel etiam Dimenſio quævis, vel Radix Dimenſionis, inveſtiganda eſt. P, primum Terminum Quantitatis ejus; Q reliquos Terminos diviſos per primum. Et $\frac{m}{n}$ numeralem Indicem Dimenſionis ipſius $P+PQ$; ſive Dimenſio illa ſit integra; ſive, (ut ita loquar,) fracta; ſive affirmativa, ſive negativa, Nam, ſicut Analyſtæ, pro aa, aaa, &c. ſcribere ſolent a^2, a^3, &c. ſic ego, pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$; $\sqrt{C.a^5}$, &c. ſcribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$; & pro $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{aaa}$, ſcribo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}. Et ſic pro $\frac{aa}{\sqrt{C: a^3+bbx}}$, ſcribo $aa\times\overline{a^3+bbx}|^{-\frac{1}{3}}$; & pro $\frac{aab}{\sqrt{C: a^3+bbx\times a^3+bbx}}$ ſcribo $aab\times\overline{a^3+bbx}|^{-\frac{2}{3}}$. In quo ultimo caſu, ſi $\overline{a^3+bbx}|^{-\frac{2}{3}}$ concipiatur eſſe $\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}}$ in Regulâ: erit $P=a^3$, $Q=\frac{bbx}{a^3}$, $m=-2$, & $n=3$. Denique, pro Terminis inter operandum inventis in Quoto, uſurpo A, B, C, D, &c. Nempe A pro primo Termino $P^{\frac{m}{n}}$; B pro ſecundo $\frac{m}{n}AQ$; & ſic deinceps.

Ceterùm uſus Regulæ patebit Exemplis.

EXEMPLUM I.

Eſt $\sqrt{cc+xx}$, (ſeu $\overline{cc+xx}|^{\frac{1}{2}}$), $= c + \frac{xx}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} + \frac{7x^{10}}{256c^9} -$ &c. Nam, in hoc caſu, eſt $P=cc$; $Q=\frac{xx}{cc}$; $m=1$; $n=2$; A $(=P^{\frac{m}{n}}=\overline{cc}|^{\frac{1}{2}})=c$; B $(=\frac{m}{n}$

$\frac{m}{n}$ AQ) $= \frac{xx}{2c}$; C $(= \frac{m-n}{2n}$ BQ) $= \frac{-x^4}{8c^3}$. Et ſic deinceps.

E x e m p l u m II.

Eſt $\sqrt[5]{c^5+c^4x-x^5}$: , (id eſt, $\overline{c^5+c^4x-x^5}|^{\frac{1}{5}}$) $= c + \frac{c^4x-x^5}{5c^4} - \frac{2c^8xx+4c^4x^6-2x^{10}}{25c^9}$ + &c. Ut patebit ſubſtituendo in allatam Regulam, 1 pro m, 5 pro n, c^5 pro P, & $\frac{c^4x-x^5}{c^5}$ pro Q. Poteſt etiam $-x^5$ ſubſtitui pro P, & $\frac{c^4x+c^5}{-x^5}$ pro Q; & tunc evadet $\sqrt[5]{c^5+c^4x-x^5} = -x + \frac{c^4x+c^5}{5x^4} + \frac{2c^8xx+4c^9x+c^{10}}{25x^9}$ + &c.

Prior modus eligendus eſt, ſi x valde parvum ſit; poſterior, ſi valde magnum.

E x e m p l u m III.

Eſt $\frac{N}{\sqrt[3]{y^3-aay}}$, (hoc eſt, $N\times\overline{y^3-a^2y}|^{-\frac{1}{3}}$) $= N\times\frac{1}{y} + \frac{aa}{3y^3} + \frac{a^4}{9y^5} + \frac{7a^6}{81y^7}$ + &c. Nam, $P=y^3$; $Q=\frac{-aa}{yy}$; $m=-1$; $n=3$; A$(=P^{\frac{m}{n}} = y^{3\times-\frac{1}{3}}) = y^{-1}$, hoc eſt, $\frac{1}{y}$: B$(=\frac{m}{n}\times AQ = \frac{-1}{3}\times\frac{1}{y}\times\frac{-aa}{yy}) = \frac{aa}{3y^3}$; &c.

E x e m p l u m IV.

Radix cubica ex Quadrato-Quadrato ipſius $d+e$, (hoc eſt $\overline{d+e}|^{\frac{4}{3}}$) eſt $d^{\frac{4}{3}} + \frac{4ed^{\frac{1}{3}}}{3} + \frac{2ee}{9d^{\frac{2}{3}}} - \frac{4e^3}{81d^{\frac{5}{3}}}$ + &c. Nam, $P=d$; $Q=\frac{e}{d}$; $m=4$; $n=3$; A $(=P^{\frac{m}{n}}) = d^{\frac{4}{3}}$ &c.

Digitized by Google

EXEMPLUM V.

Eodem modo ſimplices etiam Poteſtates eliciuntur. Ut, ſi Quadrato-cubus ipſius $d+e$, (hoc eſt, $\overline{d+e}|^{5}$, ſeu $\overline{d+e}|^{\frac{5}{1}}$) deſideretur: erit, juxta Regulam, $P=d$; $Q=\frac{e}{d}$; $m=5$; & $n=1$; Adeòque $A(=P^{\frac{m}{n}})=d^{5}$; $B(=\frac{m}{n}AQ)=5d^{4}e$; & ſic $C=10d^{3}ee$; $D=10dde^{3}$; $E=5de^{4}$; $F=e^{5}$; & $G(=\frac{m-5n}{6n}FQ)=0$, Hoc eſt, $\overline{d+e}|^{5}=d^{5}+5d^{4}e+10d^{3}ee+10dde^{3}+5de^{4}+e^{5}$.

EXEMPLUM VI.

Quinetiam Diviſio, (ſive ſimplex ſit, ſive repetita,) per eamdem Regulam perficitur. Ut, ſi $\frac{1}{d+e}$, (hoc eſt, $\overline{d+e}|^{-1}$; ſive $\overline{d+e}|^{-\frac{1}{1}}$) in Seriem ſimplicium Terminorum reſolvendum ſit: Erit, juxta Regulam, $P=d$; $Q=\frac{e}{d}$; $m=-1$; $n=1$; & $A(P^{\frac{m}{n}}=d^{-\frac{1}{1}})=d^{-1}$, ſeu $\frac{1}{d}$; $B(=\frac{m}{n}\times AQ=-1\times\frac{1}{d}\times\frac{e}{d}=-\frac{e}{dd}$; & ſic $C=\frac{ee}{d^{3}}$; $D=-\frac{e^{3}}{d^{4}}$, &c., Hoc eſt, $\frac{1}{d+e}=\frac{1}{d}-\frac{e}{dd}+\frac{ee}{d^{3}}-\frac{e^{3}}{d^{4}}+$ &c.

EXEMPLUM VII.

Sic & $\overline{d+e}|^{-3}$, (hoc eſt, Unitas ter diviſa per $d+e$, vel ſemel per Cubum ejus,) evadit $\frac{1}{d^{3}}-\frac{3e}{d^{4}}+\frac{6ee}{d^{5}}-\frac{10e^{3}}{d^{6}}+$ &c.

EXEM-

EXEMPLUM VIII.

Et $N \times \overline{d+e}|^{-\frac{1}{3}}$, (hoc eſt, N diviſum per Radicem cubicam ipſius $d+e$) evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{1}{3}}} - \frac{e}{3d^{\frac{4}{3}}} + \frac{2ee}{9d^{\frac{7}{3}}} - \frac{14e^3}{81d^{\frac{10}{3}}} + \&c.$

EXEMPLUM IX.

Et $N \times \overline{d+e}|^{-\frac{3}{5}}$, hoc eſt, N diviſum per Radicem Quadrato-Cubicam ex Cubo ipſius $d+e$, ſive $\frac{N}{\sqrt[5]{d^3 + 3dde + 3dee + e^3}}$ evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{3}{5}}} - \frac{3e}{5d^{\frac{8}{5}}} + \frac{12ee}{25d^{\frac{13}{5}}} - \frac{52e^3}{125d^{\frac{18}{5}}} + \&c.$

Per eandem Regulam Geneſes Poteſtatum, Diviſiones per Poteſtates, aut per Quantitates radicales, & Extractiones Radicum altiorum in Numeris etiam commodè inſtituuntur.

Extractiones Radicum Æquationum affectarum in Speciebus imitantur earum Extractionem in Numeris; Sed Methodus VIETÆ, & OUGHTREDI noſtri huic negotio minùs idonea eſt: Quapropter aliam excogitare adactus ſum, cujus ſpecimen exhibent ſequentia Diagrammata. Ubi dextra Columna prodit ſubſtituendo in mediâ Columnâ Valores y; p; q; r; &c. in ſiniſtrâ Columnâ expreſſos.

Prius Diagramma exhibet Reſolutionem hujus numeralis Æquationis $y^3 - 2y - 5 = 0$. Et hìc in ſupremis Numeris Pars negativa Radicis, ſubducta de Parte affirmativâ, relinquit abſolutam Radicem 2,09455148.

Et poſterius Diagramma exhibet Reſolutionem hujus litterariæ Æquationis $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$.

$y^3 -$

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+ 2,10000000$ &c. $- 0,00544852$ $+ 2,09455148$; &c. $= y$
$+ 2 + p = y$	$+ y^3$ $- 2y$ $- 5$	$+ 8 + 12p + 6pp + p^3$ $- 4 - 2p$ $- 5$
	Summa	$- 1 + 10p + 6pp + p^3$
$+ 0,1 + q = p$	$+ p^3$ $+ 6pp$ $+ 10p$ $- 1$	$+ 0,001 + 0,03q + 0,3qq + q^3$ $+ 0,06 + 1,2 + 6,$ $+ 1, \quad + 10,$ $- 1$
	Summa	$+ 0,061 + 11,23q + 6,3qq + q^3$
$- 0,0054 + r = q$	$+ q^3$ $+ 6,3qq$ $+ 11,23q$ $+ 0,061$	$- 0,0000001 + 0,000r$; &c. $+ 0,0001837 - 0,068$ $- 0,060642 + 11,23$ $+ 0,061$
	Summa	$+ 0,0005416 + 11,162r$
$- 0,00004852 + s = r$		

$y^3 +$

$y^3+axy+aay-x^3-2a^3=0\ (a-\frac{x}{4}+\frac{xx}{64a}+\frac{131x^3}{512aa}+\frac{509x^4}{16384a^3}$; &c.

$+a+p=y$	y^3 $+axy$ $+aay$ $-x^3$ $-2a^3$	$a^3+3aap+3app+p^3$ $+aax+axp$ $+a^3\ +aap$ $-x^3$ $-2a^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	p^3 $+3app$ $+axp$ $+4aap$ $+aax$ $-x^3$	$-\frac{1}{64}x^3+\frac{3}{16}xxq$; &c. $+\frac{3}{16}axx-\frac{3}{2}axq+3aqq$ $-\frac{1}{4}axx+axq$ $-aax+4aaq$ $+aax$ $-x^3$
$+\frac{xx}{64a}+r=q$	$+3aqq$ $+\frac{3}{16}xxq$ $-\frac{1}{2}axq$ $+4aaq$ $-\frac{65}{64}x^3$ $-\frac{1}{16}axx$	$+\frac{3x^4}{4096a}$; &c. $+\frac{3x^4}{1024a}$; &c. $-\frac{1}{128}x^3-\frac{1}{2}axr$ $+\frac{1}{16}axx+4aar$ $-\frac{65}{64}x^3$ $-\frac{1}{16}axx$
$+4aa-\frac{1}{2}ax)$	$+\frac{131}{128}x^3-\frac{15x^4}{4096a}\ (+\frac{131x^3}{512aa}+\frac{509x^4}{16384a^3}$	

In priori Diagrammate, primus Terminus Valoris ipſorum $p; q; r$, in primâ Columnâ, invenitur dividendo primum Terminum Summæ proximè ſuperioris, per Coefficientem ſecundi Termini ejuſdem Summæ, (ut — 1 per 10, aut 0,061 per 11,23,) & mutando ſignum Quoti.

Et idem Terminus eodem ferè modo invenitur in ſecundo Diagrammate. Sed hìc præcipua difficultas eſt in inventione primi Termini Radicis. Id quod Methodo generali perficitur: ſed hoc, brevitatis gratiâ, jam prætereo; ut & alia quædam, quæ ad concinnandam Operationem ſpectant: neque enim hìc compendia tradere vacat. Sed dicam tantùm in genere, Quòd Radix cujuſvis Æquationis ſemel extracta, pro Regulâ reſolvendi conſimiles Æquationes aſſervari poſſit: quòdque ex pluribus ejuſmodi Regulis, Regulam generaliorem plerumque efformare liceat; & quòd Radices omnes, ſive ſimplices ſint, ſive affectæ, modis infinitis extrahi poſſint; de quorum ſimplicioribus itaque ſemper conſulendum eſt.

Quomodo ex Æquationibus, ſic ad infinitas Series reductis, Areæ, & Longitudines Curvarum, Contenta, & Superficies Solidorum, vel quorumlibet Segmentorum Figurarum quarumvis, eorùmque Centra Gravitatis determinantur; & quomodo etiam Curvæ omnes mechanicæ ad ejuſmodi Æquationes infinitarum Serierum reduci poſſint, indéque Problemata circa illas reſolvi, perinde ac ſi geometricæ eſſent; nimis longum foret deſcribere; ſufficiat ſpecimina quædam talium Problematum recenſuiſſe: Inque iis, brevitatis gratiâ, litteras A; B; C; D, &c. pro Terminis Seriei, ſicut ſub initio, nonnunquam uſurpabo.

Exemplum I.

Si ex dato Sinu recto, vel Sinu verſo, Arcus deſideretur: Sit Radius $= r$, & Sinus rectus $= x$. Erítque Arcus $= x + \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6}$; &c., hoc eſt, $= x + \frac{1\times 1\times xx}{2\times 3\times rr} A + \frac{3\times 3xx}{4\times 5rr} \times B + \frac{4\times 5xx}{6\times 7rr} C + \frac{7\times 7xx}{8\times 9rr} D +$; &c.

Vel,

Vel, ſit d Diameter, ac x Sinus verſus; & erit Arcus æqualis $d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}} +$; &c.; hoc eſt, $= \sqrt{dx}$ in $1 + \frac{x}{6d} + \frac{3xx}{40dd} + \frac{5x^3}{112d^3}$; &c.

Si viciſſim, *ex dato Arcu deſideretur Sinus*: Sit Radius $= r$ & Arcus $= z$; eritque Sinus rectus $= z - \frac{z^3}{6rr} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \frac{z^9}{362880r^8} -$; &c.; hoc eſt, $= z - \frac{zz}{2\times3rr}A - \frac{zz}{4\times5rr} \times B - \frac{zz}{6\times7rr}C -$; &c. Et Sinus verſus $= \frac{zz}{2r} - \frac{z^4}{24r^3} + \frac{z^6}{720r^5} - \frac{z^8}{40320r^7} +$; &c.; hoc eſt, $= \frac{zz}{1\times2r} - \frac{zz}{3\times4rr}A - \frac{zz}{5\times6rr} \times B - \frac{zz}{7\times8rr}C -$; &c.

EXEMPLUM II.

Si Arcus capiendus ſit in ratione datâ ad alium Arcum: Eſto Diameter $= d$, Chorda Arcûs dati $= x$, & Arcus quæſitus ad Arcum illum datum, ut n ad 1; Erítque Arcûs quæſiti Chorda $= nx + \frac{1-nn}{2\times3dd}xxA + \frac{9-nn}{4\times5dd}xxB + \frac{25-nn}{6\times7dd}xxC + \frac{49-nn}{8\times9dd}xxD + \frac{81-nn}{10\times11dd}xxE +$; &c.

Ubi nota, quòd, cùm n eſt Numerus impar, Series deſinet eſſe infinita, & evadet eadem quæ prodit per vulgarem Algebram, ad multiplicandum datum Angulum per iſtum Numerum n.

EXEMPLUM III.

Si in Axe alterutro (*Fig.* 1.) AB Ellipſeos AED, (cujus Centrum C, TAB. I.
& Axis alter DH,) detur Punctum aliquod E, circa quod Recta EG occurrens Ellipſi in G, motu angulari feratur; & ex datâ Areâ Sectoris elliptici BEG, quæratur Recta GF, quæ à Puncto G ad

 Axem

Axem normaliter demittitur: Eſto $BC = q$; $DC = r$; $EB = t$; ac duplum Areæ $BEG = z$; & erit $GF = \frac{1}{t} z - \frac{q}{6rrt^4} z^3 + \frac{10qq - 9qt}{120r^4t^7} z^5 - \frac{280q^3 + 504qqt - 225qtt}{5040r^6t^{10}} z^7 +$; &c. Sic itaque aſtronomicum illud Kepleri Problema reſolvi poteſt.

In eâdem Ellipſi, ſi ſtatuantur $CD = r$; $\frac{\overline{CB}|^2}{CD} = c$; & $CF = x$; erit Arcus ellipticus DG

$$= x + \frac{1}{6cc} x^3 + \frac{1}{10rc^3} x^5 + \frac{1}{14rrc^4} x^7 + \frac{8}{18r^3c^5} x^9 + \frac{1}{22r^4c^6} x^{11}; + \&c.$$
$$\qquad - \frac{1}{40c^4} \qquad - \frac{1}{28rc^5} \qquad - \frac{1}{24rrc^6} \qquad - \frac{1}{22r^3c^7}$$
$$\qquad\qquad + \frac{1}{112c^6} \qquad + \frac{1}{48rc^7} \qquad + \frac{3}{88rrc^8}$$
$$\qquad\qquad\qquad - \frac{5}{1152c^8} \qquad - \frac{5}{352rc^9}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{7}{2816c^{10}}$$

Hic numerales Coefficientes ſupremorum Terminorum ($\frac{1}{6}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{14}$; &c.). ſunt in muſicâ Progreſſione. Et numerales Coefficientes omnium inferiorum in unaquâque Columnâ prodeunt multiplicando continuò numeralem Coefficientem ſupremi Termini per Terminos hujus Progreſſionis $\frac{\frac{1}{2}n - 1}{2}$; $\frac{\frac{3}{2}n - 3}{4}$, $\frac{\frac{5}{2}n - 5}{6}$; $\frac{\frac{7}{2}n - 7}{8}$; $\frac{\frac{9}{2}n - 9}{10}$; &c. Ubi n ſignificat Numerum Dimenſionum ipſius c in Denominatore iſtius ſupremi Termini. *Ex. gr.* ut Terminorum infra $\frac{1}{22r^4c^6}$ Numerales Coefficientes inveniantur, pono $n = 6$, ducóque $\frac{1}{22}$, (numeralem Coefficientem ipſius $\frac{1}{22r^4c^6}$) in $\frac{\frac{1}{2}n - 1}{2}$; hoc eſt, in 1; & prodit $\frac{1}{22}$, numeralis Coefficiens Termini proximè

Digitized by Google

ximè inferioris: Dein duco hunc $\frac{1}{22}$ in $\frac{\frac{1}{2}n - 3}{4}$; ſive in $\frac{n - 3}{4}$; hoc eſt, in $\frac{3}{4}$; & prodit $\frac{3}{88}$ numeralis Coefficiens tertii Termini in iſtâ Columnâ. Atque ita $\frac{3}{88} \times \frac{\frac{5}{2}n - 5}{6}$ facit $\frac{5}{352}$, numeralem Coefficientem quarti Termini; & $\frac{5}{352} \times \frac{\frac{7}{2}n - 7}{8}$ facit $\frac{7}{2816}$, numeralem Coefficientem infimi Termini. Idem in aliis ad infinitum uſque Columnis præſtari poteſt. Adeóque valor ipſius DG per hanc Regulam pro lubitu produci.

Ad hæc, ſi BF dicatur $= x$, ſitque r latus rectum Ellipſeos, & $e = \frac{r}{AB}$; Erit Arcus ellipticus $BG = \sqrt{rx}$ in

$$1 + \frac{+2 - \frac{3}{2}e}{3r}x + \frac{-2 + 3e - \frac{5}{8}ee}{5rr}xx + \frac{+4 - 9e + \frac{27}{4}ee - \frac{7}{?}e^3}{7r^3}x^3 + \frac{-10 + 30e - \frac{1??}{4}ee + \frac{61}{8}e^3 - \frac{45}{12?}e^4}{9r^4}x^4;$$

Quare, ſi ambitus totius Ellipſeos deſideretur; biſeca CB in F, & quære Arcum DG, per prius Theorema, & Arcum BG per poſterius.

Si, vice verſâ, *ex dato Arcu Elliptico* DG, quæratur Sinus ejus CF; tum dicto $CD = r$, $\frac{\overline{CP}|^2}{CD} = c$, & Arcu illo $DG = z$; Erit:

$$CF = z - \frac{1}{6cc}z^3 - \frac{1}{10rc^3}z^5 - \frac{1}{14rrc^4}z^7 - ; \&c.$$
$$+ \frac{13}{120c^4} \qquad + \frac{71}{420rc^5}$$
$$- \frac{493}{5040c^6}$$

Quæ autem de Ellipſi dicta ſunt, omnia facilè accommodantur ad

ad Hyperbolam, mutatis tantùm ſignis ipſorum c, & e, ubi ſunt imparium Dimenſionum.

Exemplum IV.

TAB. I. Præterea, (*Fig.* 2.) ſi ſit CE Hyperbola, cujus Aſymptoti AD, AF, rectum Angulum FAD conſtituant; & ad AD erigantur utcunque Perpendicula BC, DE, occurrentia Hyperbolæ in C, & E; & AB dicatur $= a$; BC $= b$; & Area BCED $= z$; Erit BD $= \frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{120a^4b^5} +$; &c. Ubi Coefficientes Denominatorum prodeunt multiplicando Terminos hujus arithmeticæ Progreſſionis, 1; 2; 3; 4; 5; &c. in ſe continuo.

Et hinc ex Logarithmo dato poteſt Numerus ei competens inveniri.

Exemplum V.

TAB. II. Eſto (*Fig.* 3.) VDE *Quadratrix*, cujus Vertex eſt V, exiſtente A Centro, & AE Semi-diametro Circuli, ad quem aptatur, & Angulo VAE recto: Demiſſóque ad AE Perpendiculo quovis DB, & actâ Quadratricis Tangente DT occurrente Axi ejus AV in T: Dic AV $= a$; & AB $= x$.

Erítque BD $= a - \frac{xx}{3a} - \frac{x^4}{45a^3} - \frac{2x^6}{945a^5}, -$; &c.

Et VT $= \frac{xx}{3a} + \frac{x^4}{15a^3} + \frac{2x^6}{189a^5} +$; &c.

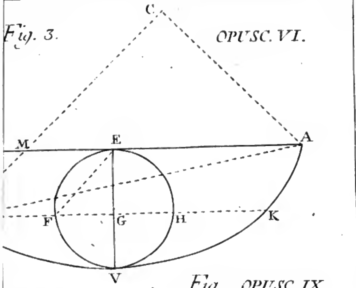
Et Area AVDB $= ax - \frac{x^3}{9a} - \frac{x^5}{225a^3} - \frac{2x^7}{6615a^5} -$; &c.

Et Arcus VD $= x + \frac{2x^3}{27aa} + \frac{14x^5}{2025a^4} + \frac{604x^7}{893025a^6} +$; &c.

Unde viciſſim, ex dato BD, vel VT, aut Areâ AVDB, Arcúve VD, per Reſolutionem affectarum Æquationum erui poteſt x ſeu AB.

EXEM-

Fig. 3. OPUSC. VI.



. VIII.

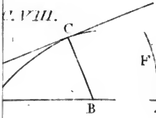
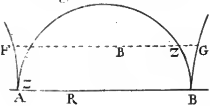


Fig. OPUSC. IX.



OPUSC. X. Tab. I.

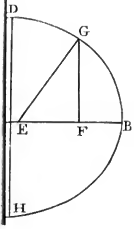
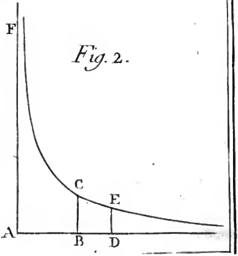


Fig. 2.



Digitized by Google

Exemplum VI.

Eſto denique (*Fig.* 4.) A E B Sphæroides revolutione Ellipſeos A E B circa Axem A B genita, & ſecta Planis quatuor, A B per Axem tranſeunte, D G parallelo A B, C D E perpendiculariter biſecante Axem, & F G parallelo C E: ſitque Recta C B $= a$; C E $= c$; C F $= x$; & F G $= y$. TAB. II.

Et ſphæroideos ſegmentum C D G F, dictis quatuor Planis comprehenſum, erit

$$+2cxy - \frac{x}{3c}y^3 - \frac{x}{20c^3}y^5 - \frac{x}{56c^5}y^7 - \frac{5x}{576c^7}y^9 - ; \text{ \&c.}$$
$$- \frac{cx^3}{3aa} - \frac{x^3}{18caa} - \frac{x^3}{40c^3aa} - \frac{5x^3}{336c^5aa} - ; \text{ \&c.}$$
$$- \frac{cx^5}{20a^4} - \frac{x^5}{40ca^4} - \frac{3x^5}{160c^3a^4} - ; \text{ \&c.}$$
$$- \frac{cx^7}{56a^6} - \frac{5x^7}{336ca^6} - ; \text{ \&c.}$$
$$- \frac{5cx^9}{576a^8} - ; \text{ \&c.}$$
$$- ; \text{ \&c.}$$

Ubi numerales Coefficientes ſupremorum Terminorum (2; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{20}$; $-\frac{1}{56}$; $-\frac{5}{576}$; &c.) in infinitum producuntur multiplicando primum Coefficientem 2 continuò per Terminos hujus Progreſſionis $-\frac{1\times1}{2\times3}$; $\frac{1\times3}{4\times5}$; $\frac{3\times5}{6\times7}$; $\frac{5\times7}{8\times9}$; $\frac{7\times9}{10\times11}$; &c. Et numerales Coefficientes Terminorum in unaquâque Columnâ deſcendentium in infinitum producuntur, multiplicando continuò Coefficientem ſupremi Termini in primâ Columnâ per eandem Progreſſionem; in ſecundâ autem per Terminos hujus $\frac{1\times1}{2\times3}$; $\frac{3\times3}{4\times5}$; $\frac{5\times5}{6\times7}$; $\frac{7\times7}{8\times9}$; &c., in tertiâ per Terminos hujus $\frac{3\times1}{2\times3}$; $\frac{5\times3}{4\times5}$; $\frac{7\times5}{6\times7}$; $\frac{9\times7}{8\times9}$; &c.; in quartâ per Terminos hujus $\frac{5\times1}{2\times3}$; $\frac{7\times3}{4\times5}$; $\frac{9\times5}{6\times7}$; &c.; in quintâ

tâ per Terminos hujus $\frac{7\times1}{2\times3}$; $\frac{9\times3}{4\times5}$; $\frac{11\times5}{6\times7}$; &c. Et ſic in infinitum.

Et eodem modo Segmenta aliorum Solidorum deſignari, & valores eorum aliquando commodè per Series quaſdam numerales in infinitum produci poſſunt.

Ex his videre eſt, quantùm fines Analyſeos per hujuſmodi infinitas Æquationes amplientur: Quippe, quæ, earum beneficio, ad omnia, penè dixerim, Problemata, (ſi numeralia DIOPHANTI, & ſimilia excipias,) ſeſe extendit.

Non tamen omninò univerſalis evadit, niſi per ulteriores quaſdam Methodos eliciendi Series infinitas. Sunt enim quædam Problemata, in quibus non liceat ad Series infinitas per Diviſionem, vel Extractionem Radicum ſimplicium, affectarúmve, pervenire. Sed quomodo in iſtis caſibus procedendum ſit, jam non vacat dicere; ut neque alia quædam tradere, quæ circa Reductionem infinitarum Serierum in finitas, ubi rei Natura tulerit, excogitavi. Nam, parciùs ſcribo, quòd hæ ſpeculationes diu mihi faſtidio eſſe cæperint, adeo ut ab iiſdem jam per quinque ferè annos abſtinuerim.

Unum tamen addam: quòd poſtquàm Problema aliquod ad infinitam Æquationem deducitur, poſſint inde variæ approximationes in uſum Mechanicæ, nullo ferè negotio, formari; quæ, per alias Methodos quæſitæ, multo labore, temporíſque diſpendio, conſtare ſolent.

Cujus rei exemplo eſſe poſſunt Tractatus HUGENII, aliorúmque de Quadraturâ Circuli. Nam, ut ex datâ Arcûs Chordâ A, & dimidii Arcûs Chordâ B, Arcum illum proximè aſſequaris; finge Arcum illum eſſe $=z$, & Circuli Radium $=r$; juxtáque ſuperiora, erit A (nempè duplum Sinûs dimidii z) $= z - \frac{z^3}{4\times6rr}$ $+ \frac{z^5}{4\times4\times120r^4} -$; &c.

Et $B = \frac{1}{2}z - \frac{z^3}{2\times16\times6rr} + \frac{z^5}{2\times16\times16\times120r^4} -$; &c.

Duc jam B in Numerum fictitium n, & à Producto aufer A, & reſidui ſecundum Terminum, (nempè $-\frac{nz^3}{2\times16\times6r} + \frac{z^3}{4\times6rr}$,) eo ut evaneſcat, pone $=0$; indéque emerget $n=8$, & erit

8B

$8B - A = 3z * - \frac{3z^5}{64\times 120r^4} +$; &c., hoc eſt, $\frac{8B-A}{3} = z$; errore tantùm exiſtente $\frac{z^5}{7680r^4}$ —; &c., in exceſſu. Quod eſt Theorema *Hugenianum.*

Inſuper, ſi (*Fig.* 5.) in Arcûs B*b* Sagittâ AD indefinitè producta, quæratur Punctum G, à quo actæ Rectæ GB, G*b*, abſcindant Tangentem E*e* quamproximè æqualem Arcui iſti: Eſto Circuli Centrum C, Diameter AK $= d$; & Sagittâ AD $= x$: Et erit TAB. II.

$$DB\,(= \sqrt{dx - xx}) = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16d^{\frac{5}{2}}} -;\ \&c.$$

Et $AE\,(= AB) = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}} +$ &c.

Et AE — DB : AD :: AE : AG; Quare $AG = \frac{3}{2}d - \frac{1}{5} \times x - \frac{12xx}{175d}$ —, vel +; &c.

Finge ergo $AG = \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x$; & viciſſim erit DG ($\frac{3}{2}d - \frac{6}{5}x$): DB :: DA : AE — DB. Quare $AE - DB = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}} + \frac{23x^{\frac{7}{2}}}{300d^{\frac{5}{2}}} +$; &c. Adde DB; & prodit $AE = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{17x^{\frac{7}{2}}}{1200d^{\frac{5}{2}}} +$; &c. Hoc aufer de valore ipſius AE ſupra habito, & reſtabit error $\frac{16x^{\frac{7}{2}}}{525d^{\frac{5}{2}}}$ +, vel —; &c. Quare, in AG, cape AH quintam partem DA, & KG $=$ HC, & actæ GBE, G*be*, abſcindent Tangentem E*e* quamproximè æqualem Arcui BA*b*; errore tantùm exiſtente $\frac{16x^3}{525d^3}\sqrt{dx}$ +, vel —; &c. multò minore ſcilicet, quàm in Theoremate HUGENII. Quod ſi fiat 7AK: 3AH :: DH : n; & capiatur KG $=$ CH — n, erit error adhuc multò minor.

 Atque

Atque ita, ſi Circuli Segmentum aliquod BAb per Mechanicam deſignandum eſſet: primò reducerem Aream iſtam in Infinitam Seriem, puta, hanc, $BbA = \frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{14d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{36d^{\frac{5}{2}}}$ —; &c. Dein quærerem Conſtructiones mechanicas, quibus hanc Seriem proximè aſſequerer: cujuſmodi ſunt hæ: Age Rectam AB, & erit Segmentum $BbA = \frac{2}{3}\overline{AB+BD}\times\frac{4}{5}AD$; proximè; exiſtente ſcilicet errore tantùm $\frac{x^3}{70dd}\sqrt{dx}+$; &c. in defectu: Vel proximiùs, erit Segmentum illud, (biſecto AD in F, & actâ Recta BF,) $= \frac{4\overline{BF}+\overline{BA}}{15}\times\overline{4AD}$; exiſtente errore ſolummodò $\frac{x^3}{560dd}\times\sqrt{dx}+$; &c., qui ſemper minor erit quàm $\frac{1}{1500}$ totius Segmenti, etiamſi Segmentum illud ad uſque ſemicirculum augeatur.

TAB. II. Sic, (*Fig.* 5.) & in Ellipſi BAb, cujus Vertex A, Axis alteruter AK, & Latus rectum AP; cape $PG = \frac{1}{2}AP + \frac{19AK-21AP}{10AK}\times\overline{AD}$. In Hyperbolâ verò, cape $PG = \frac{1}{2}AP + \frac{19AK+21AP}{10AK}\times\overline{AD}$. Et actâ Rectâ GBE abſcindet Tangentem AE quamproximè æqualem Arcui elliptico, vel hyperbolico AB; dummodò Arcus ille non ſit nimis magnus.

Et pro Areâ Segmenti hyperbolici (*Fig.* 6.) BbA; in DP cape $MD = \frac{\overline{3AD}|^2}{4AK}$, & ad D, & M erige Perpendicula $D\beta$, MN, occurrentia Semicirculo ſuper Diametro AP deſcripto: eritque $\frac{4AN+A\beta}{15}\times\overline{4AD} = BbA$ proximè: Vel, proximiùs, erit $\frac{21AN+4A\beta}{75}\times\overline{4AD} = BbA$; ſi modò capiatur $DM = \frac{\overline{5AD}|^2}{7AK}$.

Cantabrigiæ Junii 13. 1676.

Tuus &c.
ISAACUS NEWTON.

OPUS-



Fig. 4.

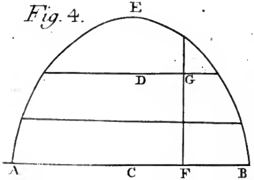


Fig. 5.

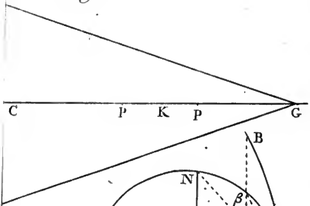
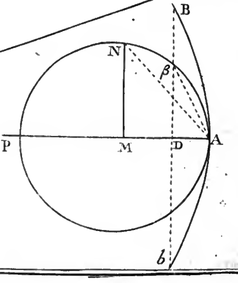


Fig. 6.



Digitized by Google

OPUSCULA XI. & XII.

ISAACI

NEWTONI

EPISTOLA POSTERIOR

AD

OLDEMBURGIUM

Edita in

COMMERCIO EPISTOLICO,

ET

EJUSDEM EPISTOLA AD COLLINSIUM

Edita LONDINI Anno 1711.

Digitized by Google

ART. I.

EXCERPTUM

Ex Epiſtolâ Leibnitii ad Oldemburgium

CUM

NEWTONO

COMMUNICANDA.

A. D. 27. Auguſti 1676.

CLARISSIMO VIRO

Henrico Oldemburgio *Godofredus Guilielmus*

Leibnitius.

Litteræ tuæ die 26. Julii datæ, plura ac memorabiliora circa rem analyticam continent, quàm multa Volumina ſpiſſa de his rebus edita. Quare tibi pariter ac Clariſſimis Viris Newtono ac Collinſio gratias ago, qui nos participes tot meditationum egregiarum eſſe voluiſtis.

Commerc. Epiſt. Edit. ſecund. pag. 129. N°. LL

Inventa Newtoni ejus ingenio digna ſunt, quod ex Opticis Experimentis & Tubo Cata-dioptrico abunde eluxit.

Ejúſque Methodus inveniendi Radices Æquationum & Areas Figurarum, per Series infinitas, prorſus differt à meâ; ut mirari libeat diverſitatem itinerum, per quæ eòdem pertingere licet.

Mercator Figuras rationales, ſeu, in quibus Ordinatarum valor ex datis Abſciſſis rationaliter exprimi poteſt, (ut ſcilicet indeterminata Quantitas in Vinculum non ingrediatur,) quadravit & ad infinitas Series reducere docuit per Diviſiones; Newtonus autem per Radicum Extractiones. Mea Methodus Corollarium eſt tantùm Doctrinæ generalis de Transformationibus; &c. *

Sed deſideraverim, ut Clariſſimus Newtonus nonnulla quoque ampliùs explicet; ut, originem Theorematis, quod initio ponit; item, modum, quo Quantitates *p*, *q*, *r*, in ſuis Operationibus invenit; ac denique, quomodo in Methodo Regreſſuum ſe gerat; ut, cùm ex Logarithmo quærit Numerum. Neque enim explicat quomodo id ex Methodo ſuâ derivetur.

Nondum mihi licuit ejus litteras, quâ merentur, diligentiâ legere; quoniam tibi è veſtigio reſpondere volui. Unde non ſatìs nunc quidem affirmare auſim, an nonnulla eorum, quæ ſuppreſſit, ex ſolâ earum lectione conſequi poſſum. Sed optandum tamen foret, ipſum ea potiùs ſupplere Newtonum; quia credibile eſt non poſſe eum ſcribere, quin aliquid ſemper præclari nos doceat, Vir (ut apparet,) egregiarum meditationum plenus. &c.

Quod dicere videmini, pleraſque difficultates, (exceptis Problematibus *Diophantæis*,) ad Series Infinitas reduci; id mihi non videtur. Sunt enim multa uſque adeò mira & implexa, ut neque ab Æquationibus pendeant, neque ex Quadraturis. Qualia ſunt; (ex multis aliis,) Problemata Methodi Tangentium inverſæ; quæ etiam Cartesius in poteſtate non eſſe faſſus eſt.

In Tomo III. Epiſtolarum, una habetur ad Beaunium; in quâ ad propoſitas à Beaunio, Curvas quaſdam invenire conatur; quarum una eſt † Ludus Naturæ, ut intervallum inter Tangentem ad (Axem) Directricem uſque productam & Ordinatim applicatam ex Curvâ ad Directricem, ſit ſemper idem; Recta ſcilicet conſtans. Hanc

* Hic Leibnitius explicat Methodum ſuam, quam explicationem, quia longiuſcula eſt & minimè neceſſaria, omiſi.

† Hic (teſtante Leibnitio, vide infra Opuſc. XVI. Art. I.) legendum eſt *hujus naturæ*, non, *Ludus Naturæ*; ſed, cùm hic error locum dederit Newtono reſpondendi, *inter* Ludos Naturæ *vix numeraverim* &c. (vide infra hoc ipſo Opuſculo Art. III.) illum reliquimus.

Hanc Curvam nec Cartesius, nec Beaunius, nec quiſquam alius, (quod ſciam,) invenit. Ego verò quâ primùm die, imo horâ, cæpi quærere, ſtatim certâ Analyſi ſolvi. Fateor tamen nondum me, quicquid in hoc genere deſiderari poteſt, conſecutum: quanquam maximi momenti eſſe ſciam. Ac de his quidem nunc ſatìs. &c.

ART. II.

EXCERPTUM

Ex Epiſtolâ Tschürnhausii

ad Oldemburgium.

Pariſiis. A. D. 1. Septembris *1679*.

Admodùm oblectatus fui, hiſce conſpectis, quæ ad Leibnitium exarâſti; maximéque me tibi devinxiſti, quod me participem volueris facere tam ingenioſarum inventionum, & promotionis Geometriæ, tam pulchræ, quàm utilis. * * Comm. Epiſt. Edit. ſecundæ pag. 141. Num. LIV.

Verùm, ut ad ſpecimina perquàm ingenioſa Newtoni revertar, hæc non potuêre mihi non placere, tam ob utilitatem, quâ ſe tam latè ad quarumvis Quantitatum Dimenſiones, ac alia difficilia enodanda in Mathematicis extendunt, quàm ob deductionem harum à fundamentis non minùs generalibus, quàm ingenioſis, derivatam: non obſtante quòd exiſtimem, ad Quantitatem quamvis ad infinitam Seriem æquipollentem reducendam, fundamenta adhuc dari & ſimpliciora & univerſaliora, quàm ſunt Fractionum & Irrationalium reductio ad tales Series, ope Diviſionis aut Extractionis, quæ mihi tale quid, non niſi per accidens, præſtare videntur; cùm hæc ſucceſſum quoque habeant, licèt non adſint Fractiones aut irrationales Quantitates. Similia porrò, quæ in hac re præſtitit eximius ille Geometra Gregorius, memoranda certè ſunt, &c.

A.R.T.

ART. III.

ISAACI NEWTONI EPISTOLA POSTERIOR

AD

OLDEMBURGIUM

Cum LEIBNITIO communicanda

A. D. 24. Octob. 1676.

VIR DIGNISSIME

Quantà cum voluptate legi Epiſtolas Clariſſimorum virorum LEIBNITII & TSCHÜRNHAUSII vix dixerim.

Perelegans ſanè eſt LEIBNITII Methodus perveniendi ad Series Convergentes: & ſatìs oſtendiſſet ingenium Auctoris, etſi nihil aliud ſcripſiſſet. Sed quæ alibi per Epiſtolam ſparſit ſuo nomine digniſſima, efficiunt etiam ut ab eo ſperemus maxima. Diverſitas modorum, quibus eòdem tenditur, eo magis placuit, quòd mihi tres Methodi perveniendi ad ejuſmodi Series innotuerant; adeò ut novam nobiſcum communicandam vix expectarem.

Unam è meis priùs deſcripſi: jam addo aliam; illam, ſcilicet, quâ primùm incidi in has Series. Nam, incidi in eas, antequàm ſcirem Diviſiones, & Extractiones Radicum, quibus jam utor. Et hujus explicatione pandendum eſt fundamentum Theorematis ſub initio Epiſtolæ prioris poſiti, quod LEIBNITIUS à me deſiderat.

Sub initio ſtudiorum meorum Mathematicorum, ubi incideram

in

in Opera Celeberrimi WALLISII noſtri, conſiderando Series, quarum intercalatione ipſe exhibet Aream Circuli, & Hyperbolæ; utpote, quòd in Serie Curvarum, quarum Baſis, ſeu Axis communis ſit $= x$, & ordinatim Applicatæ $= \overline{1 - xx}|^{\frac{0}{2}}$; $\overline{1 - xx}|^{\frac{1}{2}}$; $\overline{1 - xx}|^{\frac{2}{2}}$; $\overline{1 - xx}|^{\frac{3}{2}}$; $\overline{1 - xx}|^{\frac{4}{2}}$; $\overline{1 - xx}|^{\frac{5}{2}}$; $\overline{1 - xx}|^{\frac{6}{2}}$; &c. ſi Areæ alternarum, quæ ſunt x; $x - \frac{1}{3}x^3$; $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$; $x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$; &c., interpolari poſſent, haberemus Areas intermediarum, quarum prima $\overline{1 - xx}|^{\frac{1}{2}}$ eſt Circulus: ad has interpolandas notabam, quòd in omnibus, primus Terminus eſſet x, quòdque ſecundi Termini $\frac{0}{3}x^3$; $\frac{1}{3}x^3$; $\frac{2}{3}x^3$; $\frac{3}{3} \times x^3$; &c. eſſent in arithmeticâ Progreſſione; & proinde, quòd duo primi Termini Serierum intercalandarum deberent eſſe $x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$; $x - \frac{\frac{3}{2}x^3}{3}$; $x - \frac{\frac{5}{2}x^3}{3}$; &c.

Ad reliquas intercalandas conſiderabam, quòd Denominatores 1; 3; 5; 7; &c. erant in arithmeticâ Progreſſione; adeóque ſoli Numeratorum Coefficientes numerales eſſent inveſtigandæ. Hæ autem in alternis datis Areis erant Figuræ Poteſtatum Numeri undenarii; nempe 11^0; 11^1; 11^2; 11^3; 11^4; Hoc eſt primò 1; deinde 1, 1; tertiò, 1, 2, 1; quartò 1, 3, 3, 1; quintò 1, 4, 6, 4, 1; &c.

Quærebam itaque, quomodo, in his Seriebus, ex datis duabus primis Figuris reliquæ derivari poſſent. Et inveni, quòd poſitâ ſecundâ Figurâ m reliquæ producerentur per continuam multiplicationem Terminorum hujus Seriei, $\frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5}$; &c.

Exempli gratia; ſit, (Terminus ſecundus), $m = 4$, & erit $4 \times \frac{m-1}{2}$, hoc eſt 6, tertius Terminus; & $6 \times \frac{m-2}{3}$, hoc eſt,

(4) quartus; & $4 \times \frac{m-3}{4}$, hoc eſt, 1, quintus; & $1 \times \frac{m-4}{5}$, hoc eſt, 0, ſextus; quo Series in hoc caſu terminatur.

Hanc Regulam itaque applicui ad Series interſerendas. Et, cùm, pro Circulo, ſecundus Terminus eſſet $\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, poſui $m = \frac{1}{2}$; & prodierunt Termini $\frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2}$, ſive $-\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{8} \times \frac{\frac{1}{2}-2}{3}$, ſive $+\frac{1}{16}$; $+\frac{1}{16} \times \frac{\frac{1}{2}-3}{4}$, ſive $-\frac{5}{128}$; & ſic in infinitum. Unde cognovi deſideratam Aream Segmenti circularis eſſe $x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9}$; &c.

Et eâdem ratione prodierunt etiam interſerendæ Areæ reliquarum Curvarum: ut & Area Hyperbolæ, & ceterarum alternarum in hac Serie $\overline{1+xx}\big|^{\frac{0}{2}}$; $\overline{1+xx}\big|^{\frac{1}{2}}$; $\overline{1+xx}\big|^{\frac{2}{2}}$; $\overline{1+xx}\big|^{\frac{3}{2}}$; &c.

Et eadem eſt ratio intercalandi alias Series; ídque per Intervalla duorum, pluriúmve, Terminorum ſimul deficientium.

Hic fuit primus meus ingreſſus in has meditationes, qui è memoriâ ſanè exciderat, niſi oculos in adverſaria quædam ante paucas ſeptimanas retuliſſem. Ubi verò hæc didiceram, mox conſiderabam Terminos $\overline{1-xx}\big|^{\frac{0}{2}}$, $\overline{1-xx}\big|^{\frac{2}{2}}$, $\overline{1-xx}\big|^{\frac{4}{2}}$, $\overline{1-xx}\big|^{\frac{6}{2}}$, &c.; hoc eſt, 1, $1-xx$, $1-2xx+x^4$, $1-3xx+3x^4-x^6$, &c.; eodem modo interpolari poſſe ac Areas ab ipſis generatas: & ad hoc nihil aliud requiri, quàm omiſſionem Denominatorum, 1, 3, 5, 7, &c., in Terminis exprimentibus Areas; hoc eſt, Coefficientes Terminorum Quantitatis intercalandæ $\overline{1-xx}\big|^{\frac{1}{2}}$, vel $\overline{1-xx}\big|^{\frac{3}{2}}$, vel generaliter $\overline{1-xx}\big|^{m}$, prodire per continuam Multiplicationem Terminorum hujus Seriei $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$ &c.

Adeó-

Adeóque (exempli gratiâ) $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$, valeret $1-\frac{1}{2}xx-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6$, &c.; Et $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$ valeret $1-\frac{3}{2}xx+\frac{3}{8}\times x^4+\frac{1}{16}x^6$, &c., Et $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{3}}$ valeret $1-\frac{1}{3}xx-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6$, &c.; Sic itaque innotuit mihi generalis Reductio Radicalium, in infinitas Series, per Regulam, quam poſui initio Epiſtolæ prioris; antequam ſcirem Extractiones Radicum.

Sed, hac cognitâ, non potuit altera me diu latere. Nam, ut probarem has Operationes, multiplicavi $1-\frac{1}{2}xx-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6$, &c., in ſe; & factum eſt $1-xx$, Terminis reliquis in infinitum evaneſcentibus per continuationem Seriei. Atque ita $1-\frac{1}{3}xx-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6$, &c., bis in ſe ductum produxit etiam $1-xx$. Quod, ut certa fuerit harum concluſionum Demonſtratio, ſic me manuduxit ad tentandum è converſo, num hæ Series, quas ſic conſtitit eſſe Radices Quantitatis $1-xx$, non poſſent inde extrahi more arithmetico. Et res benè ſucceſſit. Operationis forma in quadraticis Radicibus hæc erat.

$$
\begin{array}{l}
1-xx\ \left(1-\frac{1}{2}xx-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6\ \text{\&c.}\right.\\
\underline{1\qquad\quad}\\
\underline{0-xx}\\
\underline{-xx+\frac{1}{4}x^4\qquad}\\
\qquad-\frac{1}{4}x^4\\
\qquad\underline{-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^6+\frac{1}{64}x^8}\\
\qquad\qquad\quad-\frac{1}{8}x^6-\frac{1}{64}x^8.
\end{array}
$$

His perſpectis neglexi penitus interpolationem Serierum, & has Operationes tanquam fundamenta magis genuina, ſolummodo adhibui. Nec latuit Reductio per Diviſionem, res utique facilior.

Sed & Reſolutionem affectarum Æquationum mox aggreſſus ſum, eámque obtinui. Unde ſimul ordinatim Applicatæ, Segmenta Axium, aliæque quælibet Rectæ, ex Areis Curvarum, vel Arcubus datis innotuére. Nam, regreſſio ad hæc nihil indigebat præter Reſolutionem Æquationum, quibus Areæ, vel Arcus, ex datis Rectis dabantur.

Eo tempore peſtis ingruens, (quæ contigit annis 1665, 1666,) coëgit me hinc fugere, & alia cogitare. Addidi tamen ſubinde condituram quandam Logarithmorum ex Areâ Hyperbolæ, quam hìc ſubjungo.

Sit (*Fig.* 1.) *d*FD Hyperbola, cujus Centrum C, Vertex F, & Quadratum interjectum CAFE $= 1$. In AC cape AB, A*b*, hinc inde $= \frac{1}{10}$, ſeu, 0, 1: Et, erectis Perpendiculis BD, *bd*, ad Hyperbolam terminatis, erit ſemi-Summa ſpatiorum AD, & A*d* $= 0{,}1 + \frac{0{,}001}{3} + \frac{0{,}00001}{5} + \frac{0{,}0000001}{7}$, &c.; & ſemi-differentia $= \frac{0{,}01}{2} + \frac{0{,}0001}{4} + \frac{0{,}000001}{6} + \frac{0{,}00000001}{8}$, &c.

Quæ reductæ ſic ſe habent,

0, 1000000000000	0, 0050000000000
3333333333	250000000
20000000	1666666
142857	1250
1111	100
9	1
0, 1003353477310.	0, 0050251679267

Horum Summa 0, 1053605156577 eſt A*d*; & Differentia 0, 0953101798043 eſt AD. Et eâdem ratione, poſitis AB, A*b*, hinc inde $= 0{,}2$; obtinebitur A*d* $= 0{,}2231435513142$; &

AD

AD $=$ 0, 1823215567939. Habitis ſic Logarithmis hyperbolicis Numerorum quatuor decimalium 0, 8; 0, 9; 1, 1; & 1, 2; cùm ſit $\frac{1,2}{0,8} \times \frac{1,2}{0,9} = 2$; & 0, 8 & 0, 9 ſunt minores Unitate; adde Logarithmos eorum ad duplum Logarithmi 1, 2; & habebis 0, 69314 71805597, Logarithmum hyperbolicum Numeri 2; Cujus triplo adde Logarithmum 0, 8, (ſiquidem ſit $\frac{2 \times 2 \times 2}{0,8} = 10$,) & habebis 2, 302585092993 3, Logarithmum Numeri 10: Indéque per Additionem ſimul, prodeunt Logarithmi Numerorum 9, & 11; Adeòque omnium primorum horum 2, 3, 5, 11, Logarithmi in promptu ſunt. Inſuper, ex ſolâ depreſſione Numerorum ſuperioris computi per loca decimalia, & Additione, obtinentur Logarithmi Decimalium 0, 98; 0, 99; 1, 10; 1, 02; ut, & horum 0, 998; 0, 999; 1, 001; 1,002. Et inde, per Additionem & Subductionem, prodeunt Logarithmi primorum 7, 13, 17, 37, &c. Qui unà cum ſuperioribus, per Logarithmum Numeri 10 diviſi, evadunt veri Logarithmi in Tabulam inſerendi. Sed hos poſtea propiùs obtinui.

Pudet dicere ad quot Figurarum loca has computationes otioſus eo tempore produxi. Nam, tunc ſanè nimis delectabar inventis hiſce. Sed ubi prodiit ingenioſa illa *Nicolaï* MERCATORIS Logarithmotechnia, (quem ſuppono ſua primùm inveniſſe,) cæpi ea minus curare; ſuſpicatus, vel eum noſſe Extractionem Radicum æquè ac Diviſionem Fractionum; vel alios ſaltem, Diviſione patefactâ, inventuros reliqua, priuſquàm ego ætatis eſſem maturæ ad ſcribendum.

Eo ipſo tamen tempore, quo Liber iſte prodiit, communicatum eſt per Amicum BARROW (tunc Matheſeos Profeſſorem Cantabrigienſem) cum COLLINSIO Compendium * quoddam Methodi harum Serierum; in quo ſignificaveram Areas, & Longitudines Curvarum omnium, & Solidorum Superficies, & Contenta, ex datis Rectis; & vice verſa, ex his datis Rectas determinari poſſe, & Methodum ibi indicatam illuſtraveram diverſis Seriebus.

* Hoc compendium eſt Analyſis per Æquationes numero Terminorum infinitas ſupra impreſſa.

Subortâ deinde inter nos Epiſtolari conſuetudine; Collinsius, Vir in rem Mathematicam promovendam natus, non deſtitit ſuggerere, ut hæc publici juris facerem. Et ante annos quinque (1671) cùm ſuadentibus Amicis conſilium ceperam edendi Tractatum de Refractione Lucis, & Coloribus, quem tunc in promptu habebam, cœpi de his Seriebus iterum cogitare, & Tractatum de iis etiam conſcripſi, ut utrumque ſimul ederem.

Sed, ex occaſione Teleſcopii Catadioptrici, Epiſtola ad te miſſa, quâ breviter explicui conceptus meos de naturâ Lucis, inopinatum quiddam effecit ut mei intereſſe ſentirem ad te feſtinanter ſcribere de impreſſione iſtius Epiſtolæ. Et ſubortæ ſtatim per diverſorum Epiſtolas (objectionibus aliiſque refertas) crebræ interpellationes me prorſùs à conſilio deterruerunt, & effecerunt ut me arguerem imprudentiæ, quòd, umbram captando, eatenus perdideram quietem meam, rem prorſùs ſubſtantialem.

Sub eo tempore *Jacobus* Gregorius, ex unicâ quâdam Serie è meis, quam Collinsius ad eum tranſmiſerat, poſt multam conſiderationem, (ut ad Collinsium reſcripſit,) pervenit ad eandem Methodum, & Tractatum de eâ reliquit, quem ſperamus ab Amicis ejus editum iri. Siquidem, pro ingenio, quo pollebat, non potuit non adjicere de ſuo nova multa, quæ rei Mathematicæ intereſt ut non pereant.

Ipſe autem Tractatum meum non penitus abſolveram, ubi deſtiti à propoſito; neque in hunc diem mens rediit ad reliqua adjicienda. Deerat quippe pars ea, quâ decreveram explicare modum ſolvendi Problemata, quæ ad Quadraturas reduci nequeunt, licèt aliquid de fundamentis ejus poſuiſſem. Ceterùm, in Tractatu iſto, Series infinitæ non magnam partem obtinebant.

Alia haud pauca congeſſi, inter quæ erat Methodus ducendi Tangentes, quam ſolertiſſimus Slusius ante annos duos, treſve, tecum communicavit; de quâ tu (ſuggerente Collinsio) reſcripſiſti eandem mihi etiam innotuiſſe. Diverſâ ratione in eam incidimus. Nam, res non eget Demonſtratione, prout ego operor Habito meo fundamento, nemo potuit Tangentes aliter ducere, niſi volens de rectâ viâ deviaret.

Qui-

Quinetiam non hìc hæretur ad Æquationes Radicalibus unam, vel utramque indefinitam Quantitatem involventibus utcunque affectas; ſed abſque aliquâ talium Æquationum Reductione, (quæ opus plerumque redderet immenſum,) Tangens confeſtim ducitur. Et eodem modo ſe res habet in quæſtionibus de *maximis* & *minimis*; aliiſque quibuſdam, de quibus jam non loquor.

Fundamentum harum Operationum, ſatis obvium quidem, (quoniam jam non poſſum explicationem ejus proſequi), ſic potius celavi *6accdæ 13eff7i3l9n4o4qrr4ſ9t12vx.* *

Hoc fundamento conatus ſum etiam reddere ſpeculationes de Quadraturâ Curvarum ſimpliciores; perveniſque ad Theoremata quædam generaliora. Et, ut candidè agam, ecce primum Theorema.

Ad Curvam aliquam ſit $dz^{\theta} \times \overline{e+fz^{\eta}}|^{\lambda}$ Ordinatim Applicata, Termino Abſciſſæ ſeu Baſis z normaliter inſiſtens: ubi litteræ d, e, f, denotant quaslibet Quantitates datas; &, θ, η, λ, Indices Poteſtatum ſive Dignitatum Quantitatum, quibus affixæ ſunt.

Fac $\frac{\theta+1}{\eta}=r$, $\lambda+r=s$, $\frac{d}{\eta f}\times\overline{e+fz^{\eta}}|^{\lambda+1}=Q$, & $r\eta-\eta=\pi$; Et Area Curvæ erit Q in $\frac{z^{\pi}}{s}-\frac{r-1}{s-1}\times\frac{eA}{fz^{\eta}}+\frac{r-2}{s-2}\times\frac{eB}{fz^{\eta}}-\frac{r-3}{s-3}\times\frac{eC}{fz^{\eta}}+\frac{r-4}{s-4}\times\frac{eD}{fz^{\eta}}$, &c., Litteris A, B, C, D, &c., denotantibus Terminos proximé antecedentes; nempe.

A Terminum $\frac{z^{\pi}}{s}$.

B Terminum $-\frac{r-1}{s-1}\times\frac{eA}{fz^{\eta}}$; &c. Hæc Series, ubi r Fractio eſt vel Numerus negativus, continuatur in infinitum; ubi verò r integer eſt & affirmativus, continuatur ad tot Terminos tantùm, quot

* Hoc eſt; *Datâ Æquatione quotcunque Fluentes Quantitates involvente, Fluxiones invenire; & vice verſâ.*

quot ſunt Unitates in eodem r, & ſic exhibet geometricam Quadraturam Curvæ. Rem exemplis illuſtro.

EXEMPL. I.

Proponatur Parabola, cujus ordinatim Applicata ſit $\sqrt{az}$. Hæc, in formam Regulæ reducta, fit $z^0 \times \overline{0 + az^1}|^{\frac{1}{2}}$. Quare, $d = 1$, $\theta = 0$, $e = 0$, $f = a$, $\eta = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$. Adeóque $r = 1$, $s = 1\frac{1}{2}$, $Q = \frac{1}{a} \times az^{\frac{3}{2}}$, $\pi = 0$. Et erit Area quæſita $\frac{1}{a} \times az^{\frac{3}{2}}$ in $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$; hoc eſt, $\frac{2}{3}\ z\sqrt{az}$. Et ſic in genere, ſi cz^η ponatur ordinatim Applicata, prodibit Area $\frac{c}{\eta+1}z^{\eta+1}$.

EXEMPLUM II.

Sit ordinatim Applicata $\frac{a^4z}{c^4 - 2cczz + z^4}$. Hæc, per Reductionem, fit $a^4z \times \overline{cc - zz}|^{-2}$; vel etiam $a^4z^{-3} \times \overline{-1 + ccz^{-2}}|^{-2}$. In priori caſu eſt $d = a^4$, $\theta = 1$, $e = cc$, $f = -1$, $\eta = 2$, $\lambda = -2$. Adeóque $r = 1$, $s = -1$, $Q = -\frac{a^4}{2} \times \overline{cc - zz}|^{-1}$, hoc eſt, $-\frac{a^4}{2cc - 2zz}$; $\pi = 0$. Et Area Curvæ Q in $-\frac{z^0}{1}$, id eſt, $= \frac{a^4}{2cc - 2zz}$. In ſecundo autem caſu, eſt $d = a^4$, $\theta = -3$, $e = -1$, $f = cc$, $\eta = -2$, $\lambda = -2$, $r = 1$, $s = -1$, $Q = -\frac{a^4}{2cc} \times \overline{-1 + ccz^{-2}}|^{-1}$, id eſt, $-\frac{a^4zz}{2c^4 - 2cczz}$, $\pi = 0$. Et Area $=$ Q in $-\frac{z^0}{1}$, hoc eſt, $\frac{a^4zz}{2c^4 - 2cczz}$. Area his caſibus diverſimode exhibetur, quatenus com-

computatur à diverſis finibus, quorum aſſignatio per hos inventos valores Arearum facilis eſt.

EXEMPLUM III.

Sit ordinatim Applicata $\frac{a^5}{z^5}\sqrt{bz+zz}$; hoc eſt, per Reductionem ad debitam formam, vel $a^5 z^{-\frac{9}{2}} \times \overline{b+z}|^{\frac{1}{2}}$, vel $a^5 z^{-4} \times \overline{1+bz^{-1}}|^{\frac{1}{2}}$. Erit in priori caſu $d = a^5$, $\theta = -\frac{9}{2}$, $e = b$, $f = 1$, $\eta = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$. Adeóque $r = -\frac{7}{2}$ &c. Quare, cùm r non ſit Numerus affirmativus, procedo ad alterum caſum. Hic eſt $d = a^5$, $\theta = -4$, $e = 1$, $f = b$, $\eta = -1$, $\lambda = \frac{1}{2}$. Adeóque $r = 3$, $s = 3\frac{1}{2}$, $Q = -\frac{a^5}{b} \times \overline{1+bz^{-1}}|^{\frac{3}{2}}$, ſeu, $-\frac{a^5 z + a^5 b}{bzz} \times \sqrt{zz+bz}$, $\pi = -2$. Et Area Q in $\frac{z^{-0}}{3\frac{1}{2}} - \frac{2}{2\frac{1}{2}} \times \frac{z^{-1}}{3\frac{1}{2}b} + \frac{1}{1\frac{1}{2}} \times \frac{2}{2\frac{1}{2}} \times \frac{z^{0}}{3\frac{1}{2}bb}$, hoc eſt, $= \frac{-30bb+24bz-16zz}{105bbzz}$ in $\frac{a^5 z + a^5 b}{bzz} \times \sqrt{zz+bz}$.

EXEMPLUM IV.

Sit denique ordinatim Applicata $\frac{bz^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[5]{c^3 - 3accz^{\frac{2}{3}} + 3aacz^{\frac{4}{3}} - a^3 zz}}$: Hæc, ad formam Regulæ reducta, fit $bz^{\frac{1}{3}} \times \overline{c - az^{\frac{2}{3}}}|^{-\frac{3}{5}}$. Indéque eſt $d = b$, $\theta = \frac{1}{3}$, $e = c$, $f = -a$, $\eta = \frac{2}{3}$, $\lambda = -\frac{3}{5}$, $r = 2$, $s = \frac{7}{5}$, $Q = -\frac{3b}{2a} \times \overline{c - az^{\frac{2}{3}}}|^{\frac{2}{5}}$, $\pi = \frac{2}{3}$. Et Area $Q \times \frac{5z^{\frac{2}{3}}}{7} - \frac{5}{2} \times -\frac{5c}{7a}$, id eſt, $-\frac{30abz^{\frac{2}{3}} + 75bc}{28aa} \times \overline{c - az^{\frac{2}{3}}}|^{\frac{2}{5}}$.

Quòd, ſi res non ſucceſſiſſet in hoc caſu, exiſtente *r* vel Fractione, vel Numero negativo, tunc tentâſſem alterum caſum, purgando Terminum $-az^{\frac{2}{5}}$ in ordinatim Applicatâ à Coefficiente $z^{\frac{2}{5}}$; hoc eſt, reducendo ordinatim Applicatam ad hanc formam, $bz^{-\frac{1}{15}} \times \overline{-a+cz^{-\frac{2}{5}}}|^{-\frac{3}{5}}$. Et, ſi *r* in neutro caſu fuiſſet Numerus integer & affirmativus, concluſiſſem Curvam ex earum numero eſſe, quæ non poſſunt geometricè quadrari. Nam, quantùm animadverto, hæc Regula exhibet in infinitis Æquationibus Areas omnium geometricam Quadraturam admittentium Curvarum, quarum ordinatim Applicatæ conſtant ex Poteſtatibus, Radicibus, vel quibuslibet Dignitatibus Binomii cujuſcunque; licèt non directè, ubi Index Dignitatis eſt Numerus integer.

At quando hujuſmodi Curva aliqua non poteſt geometricè quadrari; ſunt ad manus alia Theoremata pro comparatione ejus cum conicis Sectionibus, vel ſaltem cum aliis Figuris ſimpliciſſimis, quibuſcum poteſt comparari: ad quod ſufficit etiam hoc ipſum unicum jam deſcriptum Theorema, ſi debitè concinnetur.

Pro Trinomiis etiam, & aliis quibuſdam Regulas quaſdam concinnavi.

Sed in ſimplicioribus vulgóque celebratis Figuris vix aliquid relatu dignum reperi, quod evaſit aliorum conatus, niſi fortè Longitudo Ciſſoidis ejuſmodi cenſeatur, Ea ſic conſtruitur.

Sit (*Fig.* 2.) V D Ciſſois, A V Diameter Circuli, ad quem aptatur, V vertex, A F Aſymptotos ejus, ac D B perpendiculare quodvis ad A V demiſſum. Cum ſemi-axe A F $=$ A V, & ſemi-parametro A G $= \frac{1}{3}$ A V, deſcribatur Hyperbola F *k* K; & inter A B & A V ſumptâ A C mediâ proportionali, erigantur ad C & V Perpendicula C *k*, V K, Hyperbolæ occurrentia in *k* & K; Et agantur Rectæ K T, *k t*, tangentes Hyperbolam in eiſdem K, & *k*, & occurrentes A V in T & *t*, & ad A V conſtituatur Rectangulum A V N M æquale Spatio T K *k t*. Et Ciſſoidis V D Longitudo erit ſextupla Altitudinis V N. Demonſtratio perbrevis eſt. Sed ad infinitas Series redeo.

Quam-

Quamvis multa reſtent inveſtiganda circa modos approximandi, & circa diverſa Serierum genera quæ poſſunt ad id conducere: tamen vix cum TSCHÜRNHAUSIO ſperaverim dari poſſe, aut ſimpliciora, aut magis generalia fundamenta reducendi Quantitates ad hoc genus Serierum, de quo agimus, quàm ſunt Diviſiones & Extractiones Radicum, quibus LEIBNITIUS & ego utimur; ſaltem non generaliora: quia pro Quadraturâ & *εὐθύνσει* Curvarum, ac ſimilibus, nullæ poſſunt dari Series ex hiſce ſimplicibus Terminis algebraïcis, (unicam tantùm indefinitam Quantitatem involventibus,) conſtantes, quas non licet hac Methodo colligere.

Nam, non poſſunt eſſe plures convergentes Series ad idem determinandum, quàm ſunt indefinitæ Quantitates, ex quarum Poteſtatibus Series conflentur: & ego quidem ex adhibitâ quacunque indefinitâ Quantitate Seriem novi colligere; & idem credo LEIBNITIO in poteſtate eſſe.

Nam, quamvis meâ Methodo liberum ſit eligere, pro conflandâ Serie, Quantitatem quamlibet indefinitam, à quâ Quæſitum dependeat; & Methodus, quam ipſe nobiſcum communicavit, determinata videatur ad electionem talium indefinitarum Quantitatum, quibus opus commodè deduci poteſt ad Fractiones; quæ per ſolam Diviſionem evadant Series infinitæ: tamen aliæ quæcunque indefinitæ Quantitates pro Seriebus conflandis adhiberi poſſunt, per Methodum iſtam, quâ affectæ Æquationes reſolvuntur; dummodo reſolvantur in propriis Terminis; hoc eſt, conficiendo Seriem ex ſolis Terminis, quos Æquatio involvit.

Præterea, non video cur dicatur his Diviſionibus & Extractionibus Problemata reſolvi *per accidens*: ſiquidem hæ Operationes eodem modo ſe habeant ad hoc genus Algebræ, ac vulgares Operationes Arithmeticæ ad Algebram vulgò notam.

Quod autem ad ſimplicitatem Methodi attinet; nolim Fractiones, & Radicales abſque præviâ Reductione ſemper reſolvi in Series infinitas: Sed ubi perplexæ Quantitates occurrunt; tentandæ ſunt omnimodæ Reductiones; ſive fiat augendo, minuendo, multiplicando, vel dividendo Quantitates indefinitas; ſive per Methodum tranſmutatoriam LEIBNITII, aut alio quocunque modo, qui oc-

 currat.

currat. Et tunc Reſolutio in Series per Diviſionem & Extractionem opportunè adhibebitur.

Hìc autem præcipuè nitendum eſt, ut Denominatores Fractionum, & Quantitates in Vinculo Radicum, reducantur ad quàmpauciſſimas, & minimè compoſitas; & ad tales etiam, quæ in Seriem abeunt citiſſimè convergentem, etſi Radices neque convertantur in Fractiones, neque deprimantur. Nam, per Regulam initio alterius Epiſtolæ, Extractio altiſſimarum Radicum æquè ſimplex, & facilis eſt, ac Extractio Radicis quadraticæ, vel Diviſio: & Series, quæ per Diviſionem eliciuntur, ſolent minimè omnium convergere.

Hactenus de Seriebus unicam indefinitam Quantitatem involventibus locutus ſum. Sed poſſunt etiam, perſpectâ Methodo, Series ex duabus, vel pluribus aſſignatis indefinitis Quantitatibus pro arbitrio confici. Quinetiam, beneficio ejuſdem Methodi poſſunt Series ad omnes Figuras efformari, *Gregorianis* ad Circulum & Hyperbolam editis affines; hoc eſt, quarum ultimus Terminus exhibebit quæſitam Aream. Sed calculum hìc oneroſiorem nolim lubens ſubire.

Poſſunt denique Series ex Terminis compoſitis eâdem Methodo conſtitui. Quemadmodum, ſi ſit $\sqrt{aa - ax + \frac{x^3}{a}}$ ordinatim Applicata Curvæ alicujus; pono $aa - ax = zz$, & ex Binomio $zz + \frac{x^3}{a}$ extractâ Radice, prodibit $z + \frac{x^3}{2az} - \frac{x^6}{8aaz^3}$ &c. Cujus Seriei omnes Termini quadrari poſſunt per Theorema jam antè deſcriptum. Sed hæc minoris facio, quòd ubi Series ſimplices non ſunt ſatis tractabiles, aliam nondum communicatam Methodum habeo, quâ pro libitu acceditur ad quæſitum.

Ejus fundamentum eſt commoda, expedita, generalis Solutio hujus Problematis.

Curvam geometricam deſcribere, quæ per data quotcunque Puncta tranſibit.

Docuit EUCLIDES deſcriptionem Circuli per tria data Puncta. Poteſt etiam conica Sectio deſcribi per quinque data Puncta: Et Curva

va

va trium Dimenſionum per ſeptem data Puncta: adeò ut in poteſtate habeam deſcriptonem omnium Curvarum iſtius ordinis, quæ per ſeptem tantùm Puncta determinantur. Hæc ſtatim geometricè fiunt, nullo calculo interpoſito. Sed ſuperius Problema eſt alterius generis: & quamvis primâ fronte intractabile videatur, tamen res aliter ſe habet. Eſt enim ferè ex pulcherrimis quæ ſolvere deſiderem.

Seriei à Leibnitio pro quadraturâ conicarum Sectionum propoſitæ, affinia ſunt Theoremata quædam, quæ pro comparatione Curvarum cum conicis Sectionibus in catalogum dudum retuli.

Poſſum utique cum Sectionibus conicis geometricè comparare Curvas omnes, (numero infinities infinitas,) quarum ordinatim Applicatæ ſunt.

$$\frac{dz^{n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}} \text{ vel } \frac{dz^{2n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}}; \text{ \&c.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}} \text{ vel } \frac{dz^{\frac{3}{2}n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}}; \text{ \&c.}$$

$$\text{Aut } \frac{d}{z}\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}} \text{ vel } dz^{n-1}\times\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}; \text{ \&c.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}} \text{ vel } \frac{dz^{2n-1}}{\sqrt{e+fz^n+gz^{2n}}}; \text{ \&c.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{n-1}\times\sqrt{e+fz^n}}{g+hz^n} \text{ vel } \frac{dz^{2n-1}\times\sqrt{e+fz^n}}{g+hz^n}; \text{ \&c.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{n-1}}{g+hz^n\times\sqrt{e+fz^n}} \text{ vel } \frac{dz^{2n-1}}{g+hz^n\times\sqrt{e+fz^n}}; \text{ \&c.}$$

$$\text{Aut } \frac{d}{z}\frac{\sqrt{e+fz^n}}{g+hz^n} \text{ vel } dz^{n-1}\frac{\sqrt{e+fz^n}}{g+hz^n}; \text{ \&c.}$$

 Hic

Hic d, e, f, g ſignificant quaſvis datas Quantitates cum ſuis ſignis + & — affectas; z Axem, vel Baſem Curvæ; & n, 2n, $\frac{1}{2}$n — 1, $\frac{3}{2}$n — 1, n — 1, 2n — 1 Indices Poteſtatum vel Dignitatum z, ſive ſint affirmativi vel negativi, ſive integri, vel fracti, & ſingula bina Theoremata ſunt duo primi Termini Seriei in infinitum progredientis. In tertio & quarto, $4eg$ debet eſſe non majus quàm ff, niſi e & g ſint contrarii ſigni. In ceteris nulla eſt limitatio. Horum aliqua, (nempe, ſecundum, tertium, quartum, quintum & decimum tertium,) ex Areis duarum conicarum Sectionum conjunctis conſtant. Alia quædam, (ut nonum, decimum, & duodecimum,) ſunt aliter ſatis compoſita. Et omnia quidem in continuatione Progreſſionum citò evadunt compoſitiſſima; adeò ut vix per Tranſmutationem Figurarum, quibus *Jacobus* GREGORIUS, & alii uſi ſunt, abſque ulteriori fundamento inveniri poſſe putem.

Ego quidem haud quicquam generale in his obtinere potui, antequàm abſtraherem à contemplatione Figurarum, & rem totam ad ſimplicem conſiderationem ſolarum ordinatim Applicatarum reducerem. Sed, cum hæc, & hiſce generaliora, ſint in poteſtate; non dubitabitur, credo de Binomialibus longè facilioribus, quæ in his continentur, & prodeunt ponendo Litteram aliquam e vel f vel $g = 0$, & n = 1 vel 2; etſi Series, in quas iſta reſolvantur, non poſuerim in Epiſtolâ priori, nedum fortè computaverim; intentus, non in omnia particularia enumeranda, ſed in illuſtrandam Methodum per unam & alteram in ſingulis rerum generibus inſtantiam, quæ ad oſtendendam ejus generalitatem ſufficere videbatur.

Ceterùm, hæc Theoremata dant Series pluſquàm uno modo. Nam, primùm, ſi ponatur $f = 0$, & n = 1, evadit $\frac{d}{e + gzz}$; unde prodit Series nobis communicata. Sed, ſi ponatur $2eg = ff$, & n = 1; inde tandem obtinemus hanc Seriem $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$; &c. pro Longitudine quadrantalis Arcûs,

cûs, cujus chorda eſt Unitas: vel, quod perinde eſt, hanc $\frac{1}{2} + \frac{1}{15} - \frac{1}{63} + \frac{1}{143} - \frac{1}{255}$, &c. pro Longitudine dimidii ejus. Et has fortè, quia æquè ſimplices ſunt ac alteræ, & magis convergunt, non repudiabitis.

Sed ego rem aliter æſtimo. Illud enim melius quod utilius eſt, & Problema minori labore ſolvit. Sic, quamvis hæc Æquatio $x^2 - x = 1$ appareat ſimplicior hacce $yy - 2y\sqrt{\frac{81}{25} - \sqrt{20}} = \sqrt{20}$; tamen in confeſſo eſt poſteriorem reverà ſimpliciorem eſſe, propterea quod Radicem ejus y Geometra faciliùs eruit.

Et ob hanc rationem, Series pro obtinendis Arcubus Circuli vel, (quod eodem recidit,) pro obtinendis Sectoribus conicarum Sectionum, pro optimis habeo, quæ componuntur ex Poteſtatibus Sinuum.

Nam, ſiquis vellet per ſimplex computum hujus Seriei $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$, + &c. colligere Longitudinem Quadrantis ad viginti Figurarum loca decimalia, opus eſſet 5 000 000 000. Terminis Seriei, circiter; ad quorum calculum milleni anni requirerentur. Et res tardiùs obtineretur per Tangentem 45 Graduum. Sed, adhibito Sinu recto 45 Graduum, quinquaginta quinque vel ſexaginta Termini hujus Seriei $\sqrt{\frac{1}{2}} \times 1 + \frac{1}{12} + \frac{3}{160} + \frac{5}{896}$, &c. ſufficerent: quorum computatio tribus, ut opinor, vel quatuor diebus abſolvi poteſt.

Et tamen hic non eſt optimus modus computandi totam Peripheriam. Nam, Series ex Sinu recto 30 Graduum, vel Sinu verſo 60 Graduum conflata, multò citiùs dabit Arcum ſuum; cujus ſextuplum, vel duodecuplum eſt tota Peripheria. Neque majori labore eruitur Area totius Circuli ex Segmento, cujus Sagitta eſt Quadrans Diametri. Ejus computi Specimen, ſiquidem ad manus eſt, viſum fuit apponere; & unà adjungere Aream Hyperbolæ, quæ eodem calculo prodit.

Poſitq

Poſito Axe tranſverſo $= 1$, & Sinu verſo, ſeu Segmenti Sagittâ $= x$; erit Semi-ſegmentum

$$\left.\begin{matrix}\text{Hyperbolæ}\\ \text{Circuli}\end{matrix}\right\} = x^{\frac{1}{2}} \text{ in } \frac{2}{3}x \pm \frac{xx}{5} - \frac{x^3}{28} \pm \frac{x^4}{72}, \text{ \&c.}$$

Hæc autem Series ſic in infinitum producitur; ſit $2x^{\frac{3}{2}} = a$, $\frac{ax}{2} = b$, $\frac{bx}{4} = c$, $\frac{3cx}{6} = d$, $\frac{5dx}{8} = e$, $\frac{7ex}{10} = f$; &c.; Et erit Semi-ſegmentum

$$\left.\begin{matrix}\text{Hyperbolæ}\\ \text{Circuli}\end{matrix}\right\} = \frac{a}{3} \pm \frac{b}{5} - \frac{c}{7} \pm \frac{d}{9} - \frac{e}{11} \pm \frac{f}{13}, \text{ \&c.},$$

Eorùmque ſemi-Summa $\frac{a}{3} - \frac{c}{7} - \frac{e}{11} -$, &c. & ſemi-Differentia $\frac{b}{5} + \frac{d}{9} + \frac{f}{13} +$, &c. His ita præparatis, ſupono $x = \frac{1}{4}$, Quadrantem nempe Axis; & prodit $a \left(= \frac{1}{4}\right) = 0{,}25$; $b \left(= \frac{ax}{2} = \frac{0{,}25}{1 \times 8}\right) = 0{,}03125$; $c \left(= \frac{bx}{4} = \frac{0{,}03125}{2 \times 8}\right) = 0{,}001953125$; $d \left(= \frac{3cx}{6} = \frac{0{,}001953125}{8}\right) = 0{,}000244140625$. Et ſic procedo uſquedum venero ad Terminum depreſſiſſimum, qui poteſt ingredi opus. Deinde hos Terminos per 3, 5, 7, 9, 11, &c. reſpectivè diviſos diſpono in duas Tabulas: ambiguos cum primo in unam; & negativos in aliam; & addo, ut hìc vides;

0,0833333333333333	0,00027901785 71429
6250000000000	3467906605 1
271267361111	834465027
5135169396	26285354
144628917	961296
4954581	38676
190948	1663
7963	75
352	4
16	0,00028257193895 75
1	
0,0896109885646618	

Tunc

Tunc à priori Summâ aufero poſteriorem, & reſtat 0,0893284 166257043, Area ſemi-Segmenti Hyperbolici. Addo etiam eas Summas, & Aggregatum aufero à primo Termino duplicato 0,166 6666666666666, & reſtat 0,0767731061630473, Area ſemi-Segmenti circularis. Huic addo Triangulum iſtud, quo completur in Sectorem, hoc eſt, $\frac{1}{32}\sqrt{3}$, ſeu 0,0541265877365274, & habeo Sectorem ſexaginta Graduum, 0,1308996938995747, cujus ſextuplum 0,785398163397448 2 eſt Area totius Circuli. Quæ diviſa per $\frac{1}{4}$, ſive Quadrantem Diametri, dat totam Peripheriam 3,141.592.653.589.7928; ſi alias artes adhibuiſſem, potui per eundem Numerum Terminorum Seriei perveniſſe ad multò plura loca Figurarum, puta, viginti quinque aut ampliùs: ſed animus fuit hìc oſtendere, quid per ſimplex Seriei computum præſtari poſſet. Quod ſanè haud difficile eſt, cùm in omni opere Multiplicatores ac Diviſores magnâ ex parte non majores quàm 11, & nunquam majores quàm 41 adhibere opus ſit.

Per Seriem Leibnitii etiam, ſi ultimo loco dimidium Termini adjiciatur, & alia quædam ſimilia artificia adhibeantur, poteſt computum produci ad multas Figuras. Ut, & ponendo Summam Terminorum $1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25} - \frac{1}{31} + \frac{1}{33}$; &c. eſſe ad totam Seriem $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$, &c., ut $1 + \sqrt{2}$ ad 2. Sed optimus ejus uſus videtur eſſe quando, vel conjungitur cum duabus aliis perſimilibus, & citiſſimè convergentibus Seriebus, vel ſola adhibetur ad computandum Arcum 30 Graduum, poſitâ Tangente $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Tunc enim Series illa evadit $1 - \frac{1}{3\times3} + \frac{1}{5\times9} - \frac{1}{7\times27} + \frac{1}{9\times81}$, &c., quæ citò convergit. Vel, ſi conjunges cum aliis Seriebus, pone Circul

Diametrum $= 1$, & $a = \frac{1}{2}$; & Area totius Circuli erit Summa harum trium ſerierum $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} - \frac{a^7}{7} + \frac{a^9}{9} - \frac{a^{11}}{11} +$, &c.

$\frac{aa}{1} + \frac{a^5}{3} - \frac{a^8}{5} - \frac{a^{11}}{7} + \frac{a^{14}}{9} + \frac{a^{17}}{11}$, &c.

$\frac{a^4}{1} - \frac{a^{10}}{3} + \frac{a^{16}}{5} - \frac{a^{22}}{7} + \frac{a^{28}}{9}$, &c.

Hìc conſideravimus Series, quatenus adhibentur ad computandum totum Circulum. Sed, quando computandæ ſunt partes ejus, tunc quælibet Series habet proprium uſum, & in ſuo genere optima eſt. Si datur Tangens ſatis parva, vel ſatìs magna, non recurrendum erit ad Sinum aliquem, ut inde computetur Arcus, neque vice verſâ. Series dato congruens eſt Æquatio pro ſolvendo proprio Problemate.

Credo Cl. Leibnitium, dùm poſuit Seriem pro determinatione Co-ſinûs ex Arcu dato, vix animadvertiſſe Seriem meam pro determinatione Sinûs verſi ex eodem Arcu; ſiquidem hæc idem ſunt.

Neque obſervâſſe videtur morem meum generaliter uſurpandi Litteras pro Quantitatibus cum ſignis + & — affectis, dum dividit hanc Seriem $\frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} +$, &c. Nam, cùm Area hyperbolica (*Fig.* 3.) BE, hìc ſignificata per z ſit affirmativa vel negativa, prout jaceat ex unâ vel alterâ parte ordinatim Applicatæ BC; ſi Area illa in Numeris data ſit l; & l ſubſtituatur in Serie pro z, orietur vel $\frac{l}{b} + \frac{ll}{2abb} + \frac{l^3}{6aab^3} + \frac{l^4}{24a^3b^4}$, &c., vel $-\frac{l}{b} + \frac{ll}{2abb} - \frac{l^3}{6aab^3} + \frac{l^4}{24a^3b^4}$, &c., prout l ſit affirmativa, vel negativa; hoc eſt, poſito $a = 1 = b$, & l Logarithmo hyperbolico, Numerus ei correſpondens erit $1 + \frac{l}{1} + \frac{ll}{2} + \frac{l^3}{6} + \frac{l^4}{24}$, &c., ſi l ſit affirmativus; & $1 - \frac{l}{1} + \frac{ll}{2} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^4}{24}$, &c., ſi l ſit negativus. Hoc modo fugio Multiplicationem Theorematum,

rematum, quæ aliàs in nimiam molem creſcerent. Nam, verbi-gratiâ illud unicum Theorema, quod ſupra poſui pro Quadraturâ Curvarum, reſolvendum eſſet in triginta duo Theoremata, ſi pro ſignorum varietate multiplicaretur.

Præterea, quæ habet Vir clariſſimus de inventione Numeri Unitate majoris per datum Logarithmum hyperbolicum, ope Seriei $\frac{l}{1} - \frac{ll}{1\times 2} + \frac{l^3}{1\times 2\times 3} - \frac{l^4}{1\times 2\times 3\times 4} +$, &c., potiùs quàm ope Seriei $\frac{l}{1} + \frac{ll}{1\times 2} + \frac{l^3}{1\times 2\times 3} + \frac{l^4}{1\times 2\times 3\times 4}$, &c., nondum percipio. Nam, ſi unus Terminus adjiciatur ampliùs ad Seriem poſteriorem, quàm ad priorem, poſterior magis appropinquabit. Et certè minor eſt labor computare unam vel duas primas Figuras adjecti hujus Termini, quàm dividere * Unitatem per Numerum prodeuntem ex Logarithmo hyperbolico ad multa Figurarum loca extenſum, ut inde habeatur Numerus quæſitus Unitate major. Utraque igitur Series, (ſi duas dicere fas ſit,) officio ſuo fungatur. Poteſt tamen $\frac{l}{1} + \frac{l^3}{1\times 2\times 3} + \frac{l^5}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}$, &c., Series, ex dimidiâ parte Terminorum conſtans, optimè adhiberi; ſiquidem hæc dabit ſemi-Differentiam duorum Numerorum, ex quâ, & Rectangulo dato uterque datur. Sic, & ex Serie $1 + \frac{ll}{1\times 2} + \frac{l^4}{1\times 2\times 3\times 4}$, &c., datur ſemi-Summa Numerorum, indéque etiam Numeri. Unde prodit Relatio Serierum inter ſe, quâ ex unâ datâ dabitur altera.

Theorema de inventione Arcûs ex dato Co-ſinu ponendo Radium $= 1$, Co-ſinum $= c$, & Arcum $= \sqrt{6 - \sqrt{24c + 12}}$; minùs appropinquat quàm primâ fronte videtur. Poſito quidem Sinu

 verſo

* Hæc Epiſtola habetur etiam in WALLISII Operibus Mathematicis Tom. III. pag. 634. Ibi autem legitur, *quàm dividere Unitatem per prodeuntem Logarithmum hyperbolicum ad multa Figurarum loca extenſum, ut inde habeatur Logarithmus hyperbolicus quæſitus.*

verſo $= v$, error erit $\frac{v^3}{90} + \frac{v^4}{194} + \&c.$ Poteſt fieri, ut $120 - 27v$ ad $120 - 17v$, ita Chorda ($\sqrt{2v}$) ad Arcum; & error erit tantùm $\frac{61v^3\sqrt{2v}}{44800}$, circiter; qui ſemper minor eſt quàm $5\frac{1}{4}$ Minuta ſecunda, dum Arcus non ſit major quàm 45 Grad. Et ſingulis etiam biſectionibus diminuitur 128 vicibus.

Series $\frac{a^3}{1\times2\times3} - \frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5} + \frac{a^7}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7}$, &c. applicari poſſet ad computationem Tabulæ Segmentorum, ut obſervat Vir Clariſſimus; ſed res optimè abſolvitur per Canonem Sinuum. Utpote, cognitâ Quadrantis Areâ, per continuam Additionem nonæ partis ejus, habebis Sectores ad ſingulos decem Gradus in Semicirculo: deinde per continuam Additionem decimæ partis hujus, habebis Sectores ad gradus; & ſic ad decimas partes Graduum, & ultra procedi poteſt. Tunc, Radio exiſtente $= 1$, ab unoquoque Sectore & ejus Complemento ad 180 Gradus, aufer dimidium communis Sinûs recti, & relinquentur Segmenta in Tabulam referenda. Ceterùm, quamvis Series hìc non proſint, in aliis tamen locum obtinent. Et quoniam hoc ad earum uſum ſpectat, non gravabor in aliquibus attingere.

Conſtructionem Logarithmorum non aliundè peti debere credetis fortè, ex hoc ſimplici proceſſu, qui ab iſtis pendet. Per Methodum ſuprà traditam quærantur Logarithmi hyperbolici numerorum 10; 0, 98; 0, 99; 1, 01; 1, 02: id, quod fit ſpatio unius & alterius horæ. Dein, diviſis Logarithmis quatuor poſteriorum per Logarithmum Numeri 10, & addito Indice 2, prodibunt veri Logarithmi Numerorum 98; 99; 100; 101; 102; in Tabulam referendi. Hi per dena Intervalla interpolandi ſunt, & exibunt Logarithmi omnium Numerorum inter 980, & 1020: & omnibus inter 980, & 1000 iterum per dena Intervalla interpolatis, habebitur Tabula eatenus conſtructa. Tunc ex his colligendi erunt Logarithmi omnium primorum Numerorum, & eorum multiplicium, minorum quàm 100: ad quod nihil requiritur præter Additionem

&

& Subtractionem. Siquidem, ſit $\sqrt[10]{\frac{9984\times 1020}{9945}}=2$; $\sqrt[4]{\frac{8\times 9963}{984}}$ $=3$; $\frac{10}{2}=5$; $\sqrt{\frac{98}{2}}=7$; $\frac{99}{9}=11$; $\frac{1001}{7\times 11}=13$; $\frac{102}{6}=17$; $\frac{988}{4\times 13}=19$; $\frac{9936}{16\times 27}=23$; $\frac{986}{2\times 17}=29$; $\frac{992}{32}=31$; $\frac{999}{27}=37$; $\frac{984}{24}=41$; $\frac{989}{23}=43$; $\frac{987}{21}=47$; $\frac{9911}{11\times 17}=53$; $\frac{9971}{13\times 13}$ $=59$; $\frac{9882}{2\times 81}=61$; $\frac{9849}{3\times 49}=67$; $\frac{994}{14}=71$; $\frac{9928}{8\times 17}=73$; $\frac{9954}{7\times 18}=79$; $\frac{996}{12}=83$; $\frac{9968}{7\times 16}=89$; $\frac{9894}{6\times 17}=97$. Et habitis ſic Logarithmis omnium Numerorum minorum quàm 100; reſtat tantùm hos etiam ſemel atque iterum per dena intervalla interpolare.

Conſtructionis Tabulæ Sinuum, à quâ pendet tota res Trigonometrica, fundamentum optimum eſt continua Additio dati Anguli ad ſeipſum vel ad alium datum. Utpote, in Angulo (*Fig.* 4.) addendo BAE, inſcribantur HI, IK, KL, LN, MN, NO, OP, &c., æquales Radio AB, & ad oppoſita Latera demittantur perpendiculares BE, HQ, IR, KS, LT, MV, NX, OY, &c. Et Angulorum HIQ, IKH, KLI, LMK, &c., differentiæ erunt Angulus A, Sinus HQ, IR, KS &c., & Co-ſinus IQ, KR, LS, &c. Detur jam aliquis eorum LMK, & ceteri ſic eruentur. Ad SV, & MV, demitte Perpendicula Ta & Kb; &, (propter ſimilia Triangula ABE, TLa; KMb, ALT, AMV, &c.;) erit AB. BE :: TL. La $\left(=\frac{SL-LV}{2}\right)$ :: KT $\left(=\frac{1}{2}\,KM\right)$. $\frac{1}{2}$ Mb $\left(=\frac{MV-KS}{2}\right)$. Et AB. AE :: KT. S$a$ $\left(=\frac{SL+LV}{2}\right)$ :: TL. Ta $\left(=\frac{KS+MV}{2}\right)$. Unde dantur Sinus & Co-ſinus KS,

MV, SL, LV. Et ſimul patet ratio continuandi Progreſſiones. Nempe, AB. 2AE :: LV. TM+MX :: MX. VN + NY, &c. :: MV. TL+XN :: XN. MV+OY, &c.; vel AB. 2BE :: LV. XN — TL :: MV. TM — MX :: MX. OY — MV :: XN. VN — NY, &c. Et retrò AB. 2AE :: LS. KT+RK, &c. Pone ergo AB = 1, & fac BE×TL = L*a*; AE × KT = S*a*; S*a* — L*a* = LV; 2AE×LV — TM = MX, &c. ſed nodus eſt inventio Sinûs & Co-ſinûs Anguli A. Et hîc ſubveniunt Series noſtræ. Utpote, cognitâ ex ſuperioribus quadrantalis Arcûs Longitudine 1, 57079, &c., & ſimul Quadrato ejus 2, 4694, &c., divide Quadratum hoc per Quadratum Numeri exprimentis Rationem nonaginta Graduum ad Angulum A; &, Quoto dicto z, tres vel quatuor Termini hujus Seriei $1 - \frac{z}{2} + \frac{zz}{24} - \frac{z^3}{720} + \frac{z^4}{40320}$, &c., dabunt Co-ſinum iſtius Anguli A. Sic, primò quæri poteſt Angulus quinque Graduum, & inde Tabula computari ad quinos Gradus; ac deinde interpolari ad Gradus vel dimidios Gradus per eandem Methodum. Nam, non convenit progredi per nimios ſaltus. Duæ tertiæ partes Tabulæ, ſic computatæ, dant reliquam tertiam partem, per Additionem vel ſubtractionem, more noto. Siquidem, poſito KT Co-ſinu ſexaginta Graduum, ſit AE = SV, & BE = M*b*. Tunc ad decimas & centeſimas partes Graduum pergendum eſt per aliam Methodum: ſubſtitutis tamen priùs Logarithmis Sinuum inventorum, ſi ejus generis Tabula deſideretur

Ad computum Tabularum aſtronomicarum Kepleri, poſui fundamentum aliquod in alterâ Epiſtolâ. Ejus Seriei tres primi Termini, & aliquando duo ſufficiunt. Sed ad diverſas partes Ellipſeos diverſæ ejuſmodi Series aptari debent. Vel potiùs tales Series computandæ ſunt, quæ ex datâ Areâ Sectoris elliptici BGE, immediatè exhibeant Aream Sectoris Circuli, cujus Angulus eſt BEG, Radius CB. Et habitis hiſce, computum earum ad duos, tres, aut fortè quatuor Terminos, beneficio Logarithmorum, haud gravius erit quàm ſolita Reſolutio tot Triangulorum in aliis hypotheſibus: Imò fortè minus grave, ſi Series priùs debitè concinnentur; ſiquidem unus Logarithmus è Tabulâ petitus determinet omnes iſtos Ter-

Terminos, addendo ipſum & ejus multiplices ad Logarithmos datarum Coefficientium in promptu habitos.

Quæ de hoc genere Tabularum dicuntur, ad alias transferri poſſunt, ubi ratiocinia Geometrica, locum non obtinent. Sufficit autem per has Series computare triginta, vel viginti, aut fortè pauciores Terminos Tabulæ in debitis diſtantiis: ſiquidem Termini intermedii facilè interſeruntur per Methodum quandam, quam in uſum Calculatorum ferè hìc deſcripſiſſem; Sed pergo ad alia.

Quæ Cl. Leibnitius à me deſiderat explicanda, ex parte ſupra deſcripſi. Quod verò attinet ad inventionem Terminorum p, q, r in Extractione Radicis affectæ: primùm p ſic eruo. Deſcripto Angulo recto BAC, Latera ejus BA, CA, divido in partes æquales; & inde Normales erigo diſtribuentes Angulare ſpatium in æqualia Parallelogramma, vel Quadrata,

B

x^5	x^5y	x^5yy	x^5y^3	x^5y^4	x^5y^5	x^5y^6	x^5y^7
x^4	x^4y	x^4yy	x^4y^3	x^4y^4	x^4y^5	x^4y^6	x^4y^7
x^3	x^3y	x^3yy	x^3y^3	x^3y^4	x^3y^5	x^3y^6	x^3y^7
xx	xxy	$xxyy$	xxy^3	xxy^4	xxy^5	xxy^6	xxy^7
x	xy	xyy	xy^3	xy^4	xy^5	xy^6	xy^7
o	y	yy	y^3	y^4	y^5	y^6	y^7

A C

quæ concipio denominata eſſe à Dimenſionibus duarum indefinitarum Specierum, puta, x, & y regulariter aſcendentium à Termino A; prout vides in Figurâ ſuperiore, inſcriptas. Ubi y denotat Radicem extrahendam; & x alteram indefinitam Quantitatem, ex cujus Poteſtatibus Series conficienda eſt. Deinde, cùm Æquatio aliqua proponitur, Parallelogramma ſingulis ejus Terminis correſpondentia inſignio notâ aliquâ; & Regulâ ad duo, vel fortè plura, ex inſignitis Parallelogrammis applicatâ, (quorum unum ſit humillimum in Columnâ ſiniſtrâ juxta AB, & alia ad Regulam dextrorſum ſita, ceteráque omnia non contingentia Regulam ſupra eam jaceant,) ſeligo Terminos Æquationis per Parallelogramma contin-

tingentia Regulam deſignatos, & inde quæro Quantitatem Quotienti addendam.

Sic, ad extrahendam Radicem y, ex $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a} y^4 - 7aaxxyy + 6a^2x^3 + bbx^4 = 0$; Parallelogramma hujus Terminis reſpondentia ſigno notâ aliquâ *; ut vides in Fig. quintâ. Dein applico Regulam D E ad inferiorem è locis ſignatis in ſiniſtrâ Columnâ; eámque ab inferioribus ad ſuperiora dextrorſum gyrare facio, donec alium ſimiliter, vel fortè plura è reliquis ſignatis locis, cœperit attingere. Videóque loca ſic attacta eſſe x^3, $xxyy$, & y^6. Et Terminis itaque, $y^6 - 7aaxxyy + 6a^2x^3$, tanquam nihilo æqualibus, (& inſuper, ſi placet, reductis ad $v^6 - 7vv + 6 = 0$, ponendo $y = v\sqrt{ax}$,) quæro valorem y, & invenio quadruplicem, $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$, & $-\sqrt{2ax}$, quorum quemlibet pro primo Termino Quotientis accipere licet, prout è Radicibus quampiam extrahere decretum eſt.

Sic, Æquatio $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$, quam reſolvebam in priori Epiſtolâ, dat $-2a^3 + aay + y^3 = 0$, & inde $y = a$, proximè: Cùm itaque a ſit primus Terminus valoris y, pono p pro ceteris omnibus in infinitum, & ſubſtituo $a + p = y$, (Obvenient hìc aliquando difficultates nonnullæ; ſed ex iis, credo, Leibnitius ſe proprio Marte extricabit.) Subſequentes verò Termini q, r, s, &c., eodem modo ex Æquationibus ſecundis, tertiis, ceteríſque eruuntur, quo primus p è primâ, ſed curâ leviori; quia ceteri valores y ſolent prodire dividendo Terminum involventem infimam Poteſtatem indefinitæ Quantitatis x per Coefficientem Radicis p, q, r, aut s.

Intellèxti, credo, ex ſuperioribus, regreſſionem ab Areis Curvarum ad Lineas rectas, fieri per hanc Extractionem Radicis affectæ. Sed duo alii ſunt modi, quibus idem perficio.

Eorum unus affinis eſt computationibus, quibus colligebam approximationes ſub finem alterius Epiſtolæ, & intelligi poteſt per hoc Exemplum. Proponatur Æquatio ad Aream Hyperbolæ $z = x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$, &c. Et, partibus ejus multiplicatis

Digitized by Google

tiplicatis in ſe, emerget $zz = xx + x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^5$, &c., $z^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{7}{4}x^5$, &c.; $z^4 = x^4 + 2x^5$, &c.; $z^5 = x^6$, &c. Jam, de z aufero $\frac{1}{2}zz$, & reſtat $z - \frac{1}{2}zz = x - \frac{1}{6} \times x^3 - \frac{5}{24}x^4 - \frac{13}{60}x^5$, &c. Huic addo z^3, & fit $z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 = x + \frac{1}{24}x^4 + \frac{3}{40}x^5$, &c. Aufero $\frac{1}{24}z^4$, & reſtat $z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 = x - \frac{1}{120}x^5$, &c. Addo $\frac{1}{120}z^5$, & fit $z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 = x$ quamproximè; ſive $x = z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$, &c.

Eodem modo, Series de unâ indefinitâ Quantitate in aliam transferri poſſunt. Quemadmodum ſi poſito r Radio Circuli, x Sinu recto Arcûs z, & $x + \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^4} +$ &c. Longitudine Arcûs iſtius; atque hanc Seriem à Sinu recto ad Tangentem vellem tranſferre; Quæro Longitudinem Tangentis $\frac{rx}{\sqrt{rr - xx}}$, & reduco in infinitam Seriem $x + \frac{x^3}{2rr} + \frac{3x^5}{8r^4} +$ &c. Vocetur hæc Quantitas $= t$. Colligo Poteſtates ejus $t^3 = x^3 + \frac{3x^5}{2rr}$, &c.; $t^5 = x^5 +$ &c. Aufero autem t de z, & reſtat $z - t = - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{10}x^5 -$ &c. Addo $\frac{1}{3}t^3$, & fit $z - t + \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{5}x^5 +$ &c. Aufero $\frac{1}{5}t^5$, & reſtat $z - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 = 0$, quamproximè. Quare eſt $z = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 -$ &c. Sed, ſiquis in uſus trigono-

trigonometricos me juſſiſſet exhibere expreſſionem Arcûs per Tangentem; eam non hoc circuitu, ſed directâ Methodo quæſiviſſem.

Per hoc genus computi colliguntur etiam Series ex duabus vel pluribus indefinitis Quantitatibus conſtantes; & Radices affectarum Æquationum magnâ ex parte extrahuntur. Sed ad hunc poſteriorem uſum adhibeo potiùs Methodum in alterâ Epiſtolâ deſcriptam, tanquam generaliorem, &, (Regulis pro Eliſione ſuperfluorum Terminorum habitis,) paulò magis expeditam.

Pro Regreſſione verò ab Areis ad Lineas rectas, & ſimilibus, poſſunt hujuſmodi Theoremata adhiberi.

THEOREMA I.

Sit $z = ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5$, &c.

Et viciſſim erit $y = \frac{z}{a}$

$$- \frac{b}{a^3} zz$$

$$+ \frac{2bb - ac}{a^5} z^3$$

$$+ \frac{5abc - 5b^3 - aad}{a^7} z^4$$

$$+ \frac{3aacc - 21abbc + 6aabd + 14b^4 - a^3e}{a^9} z^5 + \text{\&c.}$$

Exempli gratiâ. Proponatur Æquatio ad Aream Hyperbolæ; $z = y - \frac{1}{2}yy + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$, &c. Et, ſubſtitutis in Regulâ 1. pro a, $-\frac{1}{2}$ pro b, $\frac{1}{3}$ pro c, $-\frac{1}{4}$ pro d, & $\frac{1}{5}$ pro e; viciſſim exurgit, $y = z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 +$ &c.

THEO-

THEOR. II.

Sit $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9, + \&c.$ Et viciſſim erit

$$y = \frac{z}{a}$$
$$- \frac{b}{a^4} z^3$$
$$+ \frac{3bb - ac}{a^7} z^5$$
$$+ \frac{8abc - aad - 12b^3}{a^{10}} z^7$$
$$+ \frac{55b^4 - 55abbc + 10aabd + 5aacc - a^3e}{a^{13}} z^9, + \&c.$$

Exempli gratiâ. Proponatur Æquatio ad Arcum Circuli $z = y + \frac{y^3}{6rr} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6}$, &c., Et, ſubſtitutis in Regulâ, 1 pro a; $\frac{1}{6rr}$ pro b; $\frac{3}{40r^4}$ pro c; $\frac{5}{112r^6}$ pro d; &c. orietur $y = z - \frac{z^3}{6rr} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \&c.$

Alterum modum regrediendi ab Areis ad Lineas rectas celare ſtatui.

Ubi dixi omnia penè Problemata ſolubilia exiſtere, volui de iis præſertim intelligi, circa quæ Mathematici ſe hactenus occupârunt, vel, ſaltem, in quibus ratiocinia mathematica locum aliquem obtinere poſſunt. Nam, alia ſanè adeò perplexis conditionibus implicata excogitare liceat, ut non ſatis comprehendere valeamus; & multò minùs tantarum computationum onus ſuſtinere, quod iſta requirerent.

Digitized by Google

Attamen, ne nimiùm dixiſſe videar, inverſa de Tangentibus Problemata ſunt in poteſtate, aliáque illis difficiliora. Ad quæ reſolvenda uſus ſum duplici Methodo; unâ concinniori, alterâ generaliori. Utramque viſum eſt in præſentiâ litteris tranſpoſitis conſignare, ne propter alios idem obtinentes, inſtitutum in aliquibus mutare cogerer * *5accdæ 10effh 12i 4l 3m 10n 6oqqr 7s 11t 10u 3x: 11ab 3cdd 10eæg 10ill 4m 7n 6o 3p 3q 6r 5s 11t 7ux, 3acæ 4egh 6i 4l 4m 5n 8oq 4r 3s 6t 4u, aaddæ eeeee iii mm nn oo p rrr sssss tt uu.*

Inverſum hoc Problema de Tangentibus, quando Tangens inter Punctum Contactûs, & Axem Figuræ eſt datæ Longitudinis, non indiget his Methodis. Eſt tamen Curva illa mechanica, cujus determinatio pendet ab Areâ Hyperbolæ.

Ejuſdem generis eſt etiam Problema, quando pars Axis inter Tangentem, & Ordinatim applicatam datur Longitudine.

Sed hos caſus vix numeraverim inter † Ludos Naturæ. Nam ; quando in Triangulo Rectangulo, quod ad illâ Axis parte, & Tangente, ac Ordinatim applicatâ conſtituitur, relatio duorum quorumlibet Laterum per Æquationem quamlibet definitur, Problema ſolvi poteſt abſque meâ Methodo generali: Sed, ubi pars Axis ad Punctum aliquod poſitione datum terminata ingreditur Vinculum, tunc res aliter ſe habere ſolet.

Communicatio Reſolutionis affectarum Æquationum per Methodum Leibnitii pergrata erit; juxta & explicatio quomodo ſe gerat, ubi Indices Poteſtatum ſunt Fractiones; ut in hac Æquatione, $20 + x^{\frac{3}{7}} - x^{\frac{2}{3}}$ § $- y^{\frac{7}{11}} = 0$, aut ſurdæ Quantitates, ut in hac

* Id eſt; *Una Methodus conſiſtit in Extractione fluentis Quantitatis ex Æquatione ſimul involvente Fluxionem ejus. Altera tantùm in aſſumptione Seriei pro Quantitate quâlibet incognitâ, ex quâ cetera commodè derivari poſſint, & in collatione Terminorum homologorum Æquationis reſultantis ad eruendos Terminos aſſumptæ Seriei.*

† Vide ſupra Opuſculo hoc Art. 1. pag. 326.

§ In Walliſii Operibus mathematicis Tom. III. pag. 645 habetur pro hoc Termino $- x^{\frac{6}{5}} y^{\frac{2}{3}}$.

1.

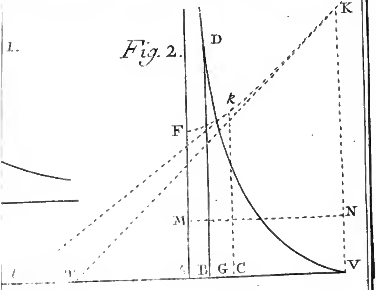


Fig. 2.

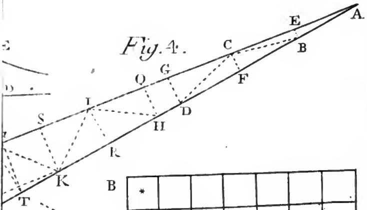


Fig. 4.

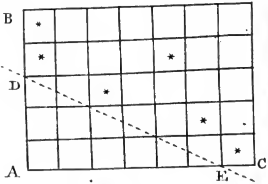


Fig. 5.

Digitized by Google

hac $\overline{x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}}\big|^{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}} = y$; ubi $\sqrt{2}$, & $\sqrt{7}$, non deſignant Coefficientes ipſius x, ſed Indices Poteſtatum, aut Dignitatum ejus; & $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ Indicem Dignitatis Binomii $x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}$. Res, credo, meâ Methodo patet; aliter deſcripſiſſem.

Sed meta tandem prolixæ huic Epiſtolæ ponenda eſt. Litteræ ſanè excellentiſſimi Leibnitii valdè dignæ erant, quibus fuſiùs hoc reſponſum darem. Et volui hac vice copioſior eſſe, quia credidi amœniora tua negotia ſeveriori hoc ſcribendi genere non debere à me crebrò interpellari.

Tui Studioſiſſimus

Is. Newton.

Digitized by Google

OPUSCULUM XII.

FRAGMENTUM EPISTOLÆ ISAACI NEWTONI *AD* COLLINSIUM.

A. D. 8. Novembr. *1676.*

NUlla extat Curva, cujus Æquatio ex tribus conſtat Terminis, in quâ, licèt Quantitates incognitæ ſe mutuò afficiant, vel Indices Dignitatum ſint ſurdæ Quantitates, (verbi gratiâ, $ax^{\lambda} + bx^{\mu}y^{\sigma} + cy^{\tau} = 0$, ub x deſignat Baſim; y Ordinatam; λ, μ, σ, τ, Indices Dignitatum ipſius x, & y; & a, b, c Quantitates cognitas unà cûm ſignis ſuis $+$, vel $-$,) nulla, inquam, hujuſmodi eſt Curva, de quâ, an quadrari poſſit, nec-ne, vel quænam ſint Figuræ ſimpliciſſimæ, quibuſcum comparari poſſit, ſive ſint conicæ Sectiones, ſive aliæ magis complicatæ, intra horæ octantem reſpondere non poſſim. Deinde Methodo directâ, & brevi, imò Methodorum omnium generalium breviſſimâ, eas comparare queo. Quin etiam, ſi duæ quævis Figuræ per hujuſmodi Æquationes expreſſæ proponantur, per eandem Regulam, eas, modò comparari poſſint, comparo.

Affirmatio, quidem, videri poteſt temeraria, propterea quod perdifficile ſit dictu, an Figura quadrari, vel cum aliâ comparari poſſit, nec ne; mihi autem manifeſtum eſt ex eo, unde deduxi, fonte; quanquam id aliis demonſtrare in me ſuſcipere nollem. Eadem Methodus Æquationes quatuor Terminorum, aliáſque complectitur, haud tamen adeo generaliter.

OPUS-

Digitized by Google

OPUSCULUM XIII.

EXCERPTUM

EX

DUABUS EPISTOLIS

ISAACI NEWTONI

AD

JOHANNEM WALLISIUM.

Digitized by Google

Digitized by Google

EXCERPTUM

EX

DUABUS EPISTOLIS

AB

ISAACO NEWTONO

AD

JOHANNEM WALLISIUM

Datis A. D. 27. Auguſti & 17. Septembris 1692.

JAmque † (Newtonus) in Litteris ad me datis Aug. 27; & Walliſ.
Sept. 17. 1692, ſcribit Progreſſiones eſſe horum Theorematum, Oper. Math.
(de Curvis quadrandis) in infinitum pergentes; quæ tamen om- Tom. II.
nia in hujuſmodi Theorematis generalioribus comprehendi poſſunt. pag. 391.

Si Curvæ Abſciſſa ſit $= z$ & pro Terminis hujus Seriei $a + bz^{\eta} + cz^{2\eta} + dz^{3\eta} + \&c.$ hujúſque $e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} + \&c.$ vel pro eorum quotlibet, ſcribantur Q & R reſpectivè; nempe, Q pro primis, & R pro ſecundis: Sit autem Ordinatim applicata $z^{\theta - 1} \times QR^{\lambda - 1}$, & ponatur $\frac{\theta}{\eta} = r; r + \lambda = s; s + \lambda = t; t + \lambda = u$ &c. erit Area Curvæ

† Harum Epiſtolarum, quod ſcire potuerim, exemplar vulgatum non eſt; ſed hoc excerptum exhibuit Wallisius plerumque ſuis (Newtoni ſcilicet) verbis. Vide Elenchum contentorum *Tom. II. pag.* 3. ſub Num. XCV.

Digitized by Google

$$z^{\theta} R^{\lambda} \text{ in } \frac{\frac{1}{\eta}a}{re}$$

$$+ \frac{\frac{1}{\eta}b - sfA}{\overline{r+2}\times e} z^{\eta}$$

$$+ \frac{\frac{1}{\eta}c - \overline{s-1}\,fB - tgA}{\overline{r+2}\times e} z^{2\eta}$$

$$+ \frac{\frac{1}{\eta}d - \overline{s-2}\,fC - \overline{t-1}\,gB - vhA}{\overline{r+3}\times e} z^{3\eta}$$

$$+ \&c.$$

Ubi A, B, C, &c. denotant Coefficientes datas Terminorum Seriei cum ſignis ſuis, nempe

A primi Termini Coefficientem $\frac{\frac{1}{\eta}a}{re}$,

B ſecundi Coefficientem $\frac{\frac{1}{\eta}b - sfA}{\overline{r+1}\times e}$, & ſic deinceps.

Quâ Methodo in hujuſmodi Series incidit, minimè explicuit. Eandem tamen litteris quibuſdam celavit, quæ recto ordine diſpoſitæ conficiunt hanc ſententiam, *Datâ Æquatione, Fluentes quotcunque Quantitates involvente, Fluxiones invenire: & vice verſâ.* Per *Fluentes Quantitates* intelligit indeterminatas, id eſt, quæ in generatione Curvarum per Motum localem perpetuò augentur vel diminuuntur; & per earum *Fluxionem* intelligit Celeritatem Incrementi vel Decrementi. Nam, quamvis *Fluentes Quantitates* & earum *Fluxiones* primâ fronte conceptu difficiles videantur, (ſolent enim

enim nova difficiliùs concipi,) earundem tamen notionem citò faciliorem evaſuram putat, quàm ſit notio *Momentorum* aut *partium minimarum* vel *differentiarum infinitè parvarum*; propterea quòd Figurarum & Quantitatum generatio per Motum continuum magis naturalis eſt, & faciliùs concipitur; & Schemata in hac Methodo ſolent eſſe ſimpliciora, quàm in illâ partium. Attamen, non negligit Theoriam talium partium, ſed eâ etiam utitur, quoties ipſa, vel opus brevius reddit, & magis perſpicuum, vel ad rimandas Fluxionum proportiones conducit. Abſciſſam Curvæ, aliámve aliquam Quantitatem Fluentem, uniformiter augeri ſupponit, & pro ejus Fluxione Unitatem ponit; pro reliquis autem Quantitatibus Fluentibus ipſas ponit Quantitates Punctis notatas in hunc modum. Sint v, x, y, z Fluentes Quantitates, & earum Fluxiones his Notis $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, deſignabuntur reſpectivè. Et, quoniam hæ Fluxiones ſunt etiam indeterminatæ Quantitates, & perpetuâ mutatione redduntur majores, vel minores, conſiderat velocitates, quibus augentur, vel diminuuntur, tanquam earum Fluxiones, & Punctis binis notat in hunc modum $\ddot{v}$, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, & perpetuum Incrementum, vel Decrementum harum Fluxionum conſiderat ut ipſarum Fluxiones, & Punctis ternis ſic notat $\dddot{v}$, $\dddot{x}$, $\dddot{y}$, $\dddot{z}$, & harum Fluxiones Punctis quaternis ſic $\ddddot{v}$, $\ddddot{x}$, $\ddddot{y}$, $\ddddot{z}$. Quâ Ratione $\dot{v}$ eſt Fluxio Quantitatis v, & $\ddot{v}$ Fluxio ipſius $\dot{v}$, & $\dddot{v}$ Fluxio ipſius $\ddot{v}$. Et, ſi Quantitates Fluentes, vel fractæ ſunt vel ſurdæ, Fluxiones earum ſic notat, Quantitatum $\frac{yy}{b-x}$, & $\sqrt{aa-xx}$, Fluxiones ſunt $\overset{\cdot}{\frac{yy}{b-x}}$ & $\sqrt{\overset{\cdot}{\overline{aa-xx}}}$, & harum Fluxiones ſunt $\overset{\cdot\cdot}{\frac{yy}{b-x}}$ & $\sqrt{\overset{\cdot\cdot}{\overline{aa-xx}}}$ & ſic porrò. His autem expoſitis, Methodum ſuam in Propoſitione hacce problematicâ fundat.

PROBL. I.

Datâ Æquatione Fluentes quotcunque Quantitates involvente, invenire Fluxiones.

SOLUTIO.

Multiplicetur quilibet Æquationis Terminus ſeparatim per Indices ſingulos Dignitatum Quantitatum omnium Fluentium, quæ in Termino illo continentur; & in ſingulis Multiplicationibus mutetur Latus unum Dignitatis in ejus Fluxionem; & Aggregatum Productorum omnium ſub propriis ſignis componet Æquationem novam, quæ Relationem Fluxionum involvet.

EXPLICATIO.

Sint a, b, c, d, &c. Quantitates determinatæ & immutabiles; & proponatur Æquatio quævis Quantitates Fluentes x, y, z, &c. involvens, puta, $x^3 - xyy + aaz - b^3 = o$. Multiplicentur Termini primò per Indices Dignitatum ipſius x in ipſis contentarum reſpective; & in quâlibet Multiplicatione pro uno Latere Dignitatis, (hoc eſt, pro x unius Dimenſionis) ſcribatur $\dot{x}$ & Summa Productorum erit $3\dot{x}xx - \dot{x}yy$. Idem fiat in y, & producetur $-2xy\dot{y}$. Idem fiat in z, & producetur $+aa\dot{z}$. Summa Productorum omnium æquetur nihilo; & habebitur Æquatio $3\dot{x}xx - \dot{x}yy - 2xy\dot{y} + aa\dot{z} = o$. Dico, quòd hæc erit Æquatio Relationem Fluxionum involvens.

DEMONSTRATIO.

Sit enim o Quantitas infinitè parva, & ſint $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$ ſynchrona Momenta, ſeu Incrementa momentanea, Quantitatum fluentium z, y, & x: & hæ Quantitates proximo Temporis momen-

to,

Digitized by Google

to per acceſſum Incrementorum momentaneorum evadent $z + o\dot{z}$, $y + o\dot{y}$, $x + o\dot{x}$; quæ in Æquatione primâ pro z, y, & x, ſcriptæ, dant hanc Æquationem $x^3 + 3xxo\dot{x} + 3xoo\dot{x}\dot{x} + 3\dot{x}^3 o^3 - xyy - \dot{x}oyy - 2xo\dot{y}y - 2\dot{x}oo\dot{y}y + xoo\dot{y}\dot{y} + \dot{x}o^3\dot{y}\dot{y} + aaz + aao\dot{z} - b^3 = 0$. Subduc Æquationem primam, & reſiduum diviſum per o erit $3\dot{x}xx + 3\dot{x}^2 xox + \dot{x}^3 oo - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y - 2\dot{x}o\dot{y}y + xo\dot{y}\dot{y} + \dot{x}oo\dot{y}\dot{y} + aa\dot{z} = 0$. Terminos multiplicatos per o, tanquam infinitè parvos, dele, & manebit Æquatio $3\dot{x}xx - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y + aa\dot{z} = 0$. *Q.E.D.*

Simili Methodò Æquatio $x^3 - xyy + aa\sqrt{ax - yy} - b^3 = 0$, Evadit $3\dot{x}xx - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y + aa\dot{\overline{\sqrt{ax - yy}}} = 0$. Ubi, ſi Fluxionem $\dot{\overline{\sqrt{ax - yy}}}$ eliminare velis, pone $\sqrt{ax - yy} = z$, & per conſequens $ax - yy = zz$, & Propoſitio dabit $a\dot{x} - 2\dot{y}y = 2\dot{z}z$ id eſt, $\frac{a\dot{x} - 2\dot{y}y}{2z} = \dot{z}$ ſeu $\frac{a\dot{x} - 2\dot{y}y}{2\sqrt{ax - yy}} = \dot{\overline{\sqrt{ax - yy}}}$. Et inde Æquatio primò inventa fit $3\dot{x}xx - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y + \frac{a^3\dot{x} - 2aa\dot{y}y}{2\sqrt{ax - yy}} = 0$.

Et eâdem Methodò pergere licet ad Fluxiones ſecundas ac tertias. Ponatur Æquatio $zy^3 - z^4 + a^4 = 0$, & Propoſitio inde dabit $\dot{z}y^3 + 3z\dot{y}yy - 4\dot{z}z^3 = 0$, & hæc Æquatio, per operationem repetitam, evadet $\ddot{z}y^3 + 6\dot{z}\dot{y}yy + 3z\ddot{y}yy + 6z\dot{y}\dot{y}y - 4\ddot{z}z^3 - 12\dot{z}\dot{z}zz = 0$; & ſic deinceps.

Ut applicetur hæc Methodus ad Quadraturam Curvarum, NEWTONUS pro Fluxione Abſciſſæ, uniformi poſitâ, Unitatem aſſumit; & Ordinatam ponit pro Fluxione Areæ; deinde Relationem inter

 Abſciſ-

Abſciſſam & Aream per Æquationem quamvis aſſumptam definit; & inde colligendo earum Fluxiones obtinet Æquationem novam, quâ Relatio inter Abſciſſam & Ordinatam definitur; & tum demum ad quadrandas Curvas efficit, ut hæc Æquatio formam quamvis deſideratam acquirat. Et hac Methodo dicit ſe computo breviſſimo & facillimo Theoremata ſupra poſita inveniſſe. Sed & eâdem Methodo comparat diverſas Curvas inter ſe, ponendo, ſcilicet, earum Ordinatas Fluxionibus Abſciſſarum reciprocè proportionales.

Sub finem Epiſtolæ anni 1676 ſcribit etiam Problema determinandi Curvas per conditiones Tangentium in ſuâ poteſtate eſſe, unà cum aliis difficilioribus; ad quæ ſolvenda ſe uſum eſſe dicit duplici Methodo, unâ concinniore, alterâ generaliore: & utramque litteris tranſpoſitis celat: quæ, in ordinem redactæ, hanc ſententiam exhibent. *Una Methodus conſiſtit in Extractione fluentis Quantitatis ex Æquatione ſimul involvente Fluxionem ejus. Altera tantùm in aſſumptione Seriei pro Quantitate quâlibet incognitâ, ex quâ cetera commodè derivari poſſunt; & in collatione Terminorum homologorum Æquationis reſultantis ad eruendos Terminos aſſumptæ Seriei.* Harum Methodorum ſecunda ex verbis jam recitatis abſque ulteriore explicatione intelligi poteſt; priorem ab Auctore jam accepi, ut ſequitur.

Hæc Methodus, ait, ejuſdem eſt generis cum eâ pro extrahendo Radices ex Æquationibus affectis ſuperiùs deſcriptâ. Pone, quòd Problema reſolvendum reducatur ad Æquationem fluentes Quantitates y, & z, unà cum earum Fluxionibus $\dot{y}$ & $\dot{z}$ involventem, & quòd Fluxio ipſius z uniformis ſit. Ut hæc Fluxio ex Æquatione evaneſcat, pro eâ ponatur Unitas, & manebit Æquatio ſolas y, z, & $\dot{y}$, involvens, *quam Reſolvendam* vocat. Proponitur inventio ipſius y in Serie infinitâ convergente, quæ ſolam z involvet. Hoc in aliquibus Æquationibus impoſſibile eſt, in aliis præparationem Æquationum requirit, ubi verò directè confici poſſit, Reſolutio eſt hujuſmodi.

Pro-

PROBLEMA II.

Ex Æquatione, Fluxionem Radicis involvente, Radicem extrahere.

RESOLUTIO.

OPERATIO PRIMA.

Termini omnes, ex eodem Æquationis latere conſiſtentes, æquentur nihilo, & ipſarum y, & $\dot{y}$, Dignitates, (ſi opus ſit,) exaltentur vel deprimantur, ſic ut earum Indices nec alicubi negativi ſint, nec tamen altiores quàm ad hunc effectum requiritur; & ſit kz^{λ} Terminus infimæ Dignitatis eorum, qui neque per y, neque per ejus Fluxionem $\dot{y}$, neque per earum Dignitatem quamvis, multiplicantur. Sit $lz^{\mu}y^{\alpha}\dot{y}^{\beta}$ Terminus alius quilibet, &, omnes ordine Terminos percurrendo, collige ex ſingulis ſeorſim numerum $\frac{\lambda-\mu+\beta}{\alpha+\beta}$ ſic, ut tot habeas ejuſmodi Numeros, quot ſunt Termini. Horum Numerorum maximus vocetur ν, & z^{ν} erit Dignitas primi Termini Seriei. Pro ejus Coefficiente ponatur a, & in Æquatione, quæ *reſolvenda* dicitur, ſcribe az^{ν} pro y, & $\nu az^{\nu-1}$ pro $\dot{y}$; ac Termini omnes reſultantes, in quibus z ejuſdem eſt Dignitatis ac in Termino kz^{λ}, ſub propriis ſignis collecti, ponantur æquales nihilo. Nam, hæc Æquatio, debitè reducta, dabit Coefficientem a. Sic habes az^{ν}, Terminum primum Seriei.

OPERATIO SECUNDA.

Pro reliquis omnibus hujus Seriei Terminis nondum inventis pone p, & habebis Æquationem $y = az^{\nu} + p$; & inde etiam (per Problema I.) Æquationem $\dot{y} = \nu az^{\nu-1} + \dot{p}$. In Reſolvendâ pro y, & $\dot{y}$, ſcribe hos eorum valores; & habebis reſolvendam novam, ubi p officium præſtat ipſius y: & ex hac Reſolvendâ primum extrahes Terminum Seriei p eodem modo atque Terminum primum Seriei totius $y = az^{\nu} + p$ ex Reſolvendâ primâ extraxiſti.

OPERA-

Operatio Tertia, et Sequentes.

Dein, tertiam Reſolvendam eâdem ratione invenies atque ſecundam inveniſti, & ex eâ Terminum tertium Seriei totius extrahes. Et ſimiliter Reſolvendam quartam invenies, & ex eâ quartum Seriei Terminum, & ſic in infinitum. Series autem ſic inventa erit Radix Æquationis, quam extrahere oportuit.

Exemplum.

Operatio Prima.

Ex Æquatione $yy\dot{z}\dot{z} - zz\dot{z}\dot{y} - dd\dot{z}\dot{z} + dz\dot{z}\dot{z} = o$, extrahenda ſit Radix y. Pone $\dot{z} = 1$, & Æquatio evadet $yy - zz\dot{y} - dd + dz = o$, quæ eſt Reſolvendâ. Jam verò Terminus infimus, in quo nec y neque $\dot{y}$ reperitur, eſt dd, qui, ipſi kz^{λ} æquatus, dat $\lambda = o$. Terminis reliquis yy, $-zz\dot{y}$, pone $lz^{\mu} y^{\alpha} \dot{y}^{\beta}$ æqualem ſucceſſivè, & inde in primo caſu habebis $\mu = o$, $\alpha = 2$, $\beta = o$; & in ſecundo $\mu = 2$, $\alpha = o$, & $\beta = 1$. Et hinc $\frac{\lambda - \mu + \beta}{\alpha + \beta}$ fit in primo caſu o, in ſecundo -1. Unde ν eſt o, & az^{ν}, & $\nu a z^{\nu - 1}$, ſunt a, & o; quarum ultimæ duæ, a, & o, in Reſolvendâ pro y, & $\dot{y}$, ſcriptæ, producunt $aa + ozz - dd + dz$; & Termini aa, & $-dd$, in quibus Index Dignitatis z eſt λ ſeu o, poſiti æquales nihilo dant $a = d$. Unde primus Seriei Terminus az^{ν} evadit d.

Operatio Secunda.

Pro Terminis reliquis pone p, & habebis Æquationem $y = d + p$, & inde (per Problema I.) $\dot{y} = \dot{p}$; qui valores in Reſolvendâ pro y, & $\dot{y}$, ſubſtituti dant Reſolvendam novam $2dp + pp - zz\dot{p} + dz = o$, ubi p, & $\dot{p}$, vices ſubeunt ipſarum y & $\dot{y}$. Terminus unicus, in quo nec p neque $\dot{p}$ reperitur, eſt dz, qui cum Termino kz^{λ} collatus, dat $\lambda = 1$. Terminis reliquis $2dp$, pp & $-zz\dot{p}$ pone $lz^{\mu} p^{\alpha} \dot{p}^{\beta}$ æqua-

æqualem ſucceſſivè; & inde in primo caſu habebis $\mu=0$, $\alpha=1$, & $\beta=0$; in ſecundo $\mu=0$, $\alpha=2$, & $\beta=0$; & in tertio $\mu=2$, $=0$, & $\beta=1$. Et hinc $\frac{\lambda-\mu+\beta}{\alpha+\beta}$ evadit primo caſu 1, in ſecundo $\frac{1}{2}$, in tertio 0. Unde ν eſt 1, & az^{ν}, & $\nu a z^{\nu-1}$, ſunt az, & a. Termini duo ultimi az^{1}, & a, in Reſolvendâ pro p, & $\dot{p}$, reſpectivè ſcripti, producunt $2daz+aazz-azz+dz$. Et Termini $2daz$, & dz, in quibus Index Dignitatis z eſt λ ſeu 1, poſiti æquales nihilo, dant $a=-\frac{1}{2}$. Unde az^{ν}, Terminus primus Seriei p, fit $-\frac{1}{2}z$.

OPERATIO TERTIA.

Pro Terminis reliquis nondum inventis pone q; & habebis Æquationem $p=-\frac{1}{2}z+q$, & inde (per Problema I.) $\dot{p}=-\frac{1}{2}+\dot{q}$: Qui valores, pro p, & $\dot{p}$, in Reſolvendâ noviſſimâ ſubſtituti, producunt Reſolvendam novam $2dq-zq+qq+\frac{3}{4}zz-zz\dot{q}=0$. Ubi q, & $\dot{q}$, vices ſupplent ipſorum y, & $\dot{y}$. Terminus unicus, in quo neque q nec $\dot{q}$ reperitur, eſt $\frac{3}{4}zz$, qui, cum kz^{λ} collatus dat, $\lambda=2$. Terminis reliquis, $2dq$, $-zq$, $+qq$, $-zz\dot{q}$, pone $lz^{\mu}q^{\alpha}\dot{q}^{\beta}$ æqualem ſucceſſivè; & inde, in primo caſu habebis, $\mu=0$, $\alpha=1$, & $\beta=0$; in ſecundo, $\mu=1$, $\alpha=1$, $\beta=0$; in tertio, $\mu=0$, $\alpha=2$, $\beta=0$: in quarto $\mu=2$, $\alpha=0$, $\beta=1$: & inde, $\frac{\lambda-\mu+\beta}{\alpha+\beta}$ evadit in primo caſu, 2; in ſecundo, tertio, & quarto, 1. Et hinc ν eſt 2, vel az^{ν}, & $\nu a z^{\nu-1}$, ſunt azz, & $2az$: qui valores in Reſolvendâ pro q, & $\dot{q}$, ſubſtituti, dant $2dazz-az^{3}+aaz^{4}+\frac{3}{4}zz-2az^{3}$; & Termini $2dazz+\frac{3}{4}zz$, in quibus Index Dignitatis z eſt λ ſeu 2,

poſiti æquales nihilo, dant $a = -\frac{3}{8d}$. Unde, az^{v}, Terminus primus Seriei q, evadit $-\frac{3zz}{8d}$.

Operatio Quarta.

Pro reliquis Seriei Terminis nondum inventis pone r; & habebis Æquationes $q = -\frac{3zz}{8d} + r$, & $\dot{q} = -\frac{3z}{4d} + \dot{r}$; & inde Reſolvendam novam $2dr + \frac{9z^3}{8d} - zr + \frac{9z^4}{64dd} - \frac{3zzr}{4d} + rr - zz\dot{r} = 0$; & ex eâ, per Methodum ſuperiorem, habebis $-\frac{9z^3}{16dd}$, Terminum primum Seriei r. Et ſic pergitur in infinitum.

Eſt igitur Radix extrahenda $y = d + p = d - \frac{1}{2}z + q = d - \frac{1}{2}z - \frac{3zz}{8d} + r = d - \frac{1}{2}z - \frac{3zz}{8d} - \frac{9z^3}{16dd} -$, &c. Et, operationem continuando, producere licet Radicem ad Terminos plures.

Et eâdem Methodo, dicit Newtonus, Radices Æquationum, Fluxiones ſecundas, tertias, quartas, $(\ddot{y}, \dddot{y}, \ddddot{y},)$ aliáſque involventium, extrahi poſſe.

His utitur Radicum Extractionibus ubi aliæ Methodi nil proſunt. Nam, in Epiſtolâ prædictâ anni 1676 docet, quòd in Solutione Problematum de Tangentibus inverſorum, caſus aliqui dantur, in quibus hæc Methodus generalis non requiritur: & particulariter, ſi in Triangulo rectangulo, quod ab Ordinatâ, Tangente, & interjacente parte Abſciſſæ conſtituitur, Relatio duorum quorumlibet è Lateribus tribus per Æquationem quamvis definiatur, Problema abſque Methodo hacce generali ſolvi poterit.

Methodi autem hæ omnes, tam particulares quàm generales, collectim ſumptæ, Solutionem exhibent ſecundæ partis Problematis, quod Newtonus ſub initio iſtius Epiſtolæ his verbis propoſuit. *Datâ Æquatione, quotcunque Fluentes Quantitates involvente, Fluxiones invenire, & vice verſâ.* Nam, tota Fluxionum Methodus in hujus directâ & inverſâ Solutione conſiſtit.

OPUSCU-

OPUSCULUM XIV.

ISAACI

NEWTONI

EPISTOLA

AD

CHAMBERLAYNUM.

Digitized by Google

Digitized by Google

ART. I.

EXCERPTUM
EX
EPISTOLA LEIBNITII
AD
CHAMBERLAYNUM
LONDINI degentem.

Vindobonæ A. D. 28. Aprilis An. 1714.

GRATIAS ago tum ..... cùm de eo, quod tam benignè te offers ad reſarciendam amicitiam inter me, & NEWTONUM. Ego quidem eam non diſcidi. Sed KEILLIUS quidam, cùm aliqua mihi contraria inſeruiſſet *Tranſactionibus* veſtris *Philoſophicis*, obſtupui, & ut hæc repararentur petivi per Epiſtolam à SLOANE Societatis à ſecretis, qui mihi miſit ſcriptum quoddam KEILLII, in quo jus ſuum ita tuebatur, ut fidem meam aggrederetur. Privatum hominis ſtomachum id effeciſſe ſum arbitratus, nullo pacto ſuſpicans Societatem aut NEWTONUM ipſum hujus negotii participes eſſe; & litigare nolens cum homine rerum anteactarum ignaro, & opinans, NEWTONUM ipſum, res geſtas meliùs cognoſcentem, laboraturum, ut jus meum mihi ſervaretur, perſecutus ſum ſatisfactionem mihi debitam.

Sed quidam, neſcio quâ captiunculâ & nimis callidâ juris interpretatione, perfecerunt, ut ego putarer cauſam dicere apud Societatem, méque ejus juriſdictioni ſubmittere, quod nunquam mihi venerat in mentem. Inſuper juſtitia poſtulat, ut certior fierem de eo, quod Societas rem penitùs diſcutere volebat, & ut mihi liceret decla-

rare, an illi rationes meas exponere vellem, & an non aliquis ex Judicibus mihi foret ſuſpectus. Itaque ſententia dicta fuit unâ tantùm parte auditâ, ita ut nullitas ſit manifeſta. Ego tamen non credo, quod ſententia hæc haberi poſſit tanquam Societatis decretum.

Nihilo-minus hanc ipſam ſententiam NEWTONUS per totum Terrarum orbem divulgandam curavit libro quodam * ad hoc ipſum edito, ut nomini meo nota inuretur, & miſſo, tanquam à Societate, in Germaniam, Galliam, & Italiam. Hoc, (ut vocatur,) Judicium, & injuria hæc, quâ immeritò appetitus eſt Vir, qui jamdudum in Societatem hanc receptus fuit, eámque non dedecoravit, multis certè non approbabitur, & plures è Societate ipſâ, ut ſpero, diſſentient. Docti nonnulli, Galli, Itali, & aliarum gentium hæc apertè improbant, & mirantur, ac futilia, (de quibus rebus Epiſtolæ apud me ſunt,) judicant, quæ contra me fuerunt allata.

Ego quidem ſemper humanus, & comis, quàm maximè poteſt, in NEWTONUM fueram, &, quanquam nunc vehementer dubitari poſſit, utrùm habuerit Methodum, quam ego inveneram, antequàm illam ex me didiciſſet, attamen locutus fueram, tanquam ſi proprio ingenio ſibi paráſſet aliquid meæ Methodo ſimile. Ille verò, inconſultis quibuſdam Adultatoribus malè credens, ſe adduci eò ſivit, ut me acerbè laceſſeret. Tu nunc vide, ſis, uter noſtrûm præcipuè facere debeat, quod neceſſarium eſt ad litem hanc terminandam.

Cùm ſim Vindobonæ, id eſt, in ultimam Germaniam, nondum vidi librum contra me divulgatum; huc enim quàm ſerò hujuſcemodi libri afferuntur; nec dignatus ſum eum per Tabellarios publicos mihi ferendum curare; itaque nondum facere potui Apologiam negotio convenientem; non deſunt tamen, qui meæ famæ jam rationem habuerunt.

Eruditos homines acriter & duriter inter ſe concertare moleſtiſſimè fero, &, ne in turbas hujus generis inciderem, ſemper diligentiſſimè curavi: nunc autem omnibus artibus ad certandum compulſus ſum; ſi tuâ operâ, quam adeò benignè polliceris & offers, malum hoc ſanari poſſet, profectò gauderem; & jam nunc de hoc valde te amo, &c.

ART. II.

* Intelligit *Commercium Epiſtolicum* COLLINSII & aliorum.

ART. II.

EPISTOLA
NEWTONI
AD
CHAMBERLAYNUM

A. D. 11. Maii 1714. V. S.

LINGUAM Gallicam non adeò penitus novi, ut ſentire poſſim totam vim verborum, quibus utitur LEIBNITIUS in Epiſtolâ ſuâ; tamen intelligo, quòd putat injuriam ſibi allatam eſſe à Regiâ Societate, & à me.

Quæ FATIUS in eum ſcripſit, (a) ſcripta ſunt me prorſus ignaro.

Ante, circiter, novem annos LEIBNITIUS famam meam læſit, (b) inſinuans, me ab illo mutuâſſe Methodum Fluxionum. KEILLIUS (c) me defendit: & ego penitùs ignoravi, quæ LEIBNITIUS ediderat in Actis Lipſienſibus, donec huc pervenit primum ejus reſponſum ad KEILLIUM, in quò reipſâ petebat LEIBNITIUS, ut earum rerum, quæ divulgaveram, (d) palinodiam canerem.

Si quid indicare potes, in quo illum injuriâ affecerim, curabo ut ei ſatisfaciam, ſed palinodiam canere nolo rerum, quas veras ſcio. Opinor autem Conventum Regiæ Societatis iniquè in illum ſe non geſſiſſe.

(a) In *geometricâ Inveſtigatione Lineæ breviſſimi deſcenſûs.*
(b) Vide Acta Lipſienſia Menſis Januar. An. 1705.
(c) Tranſ. Philoſ. Menſium Septemb. & Octob. An. 1708.
(d) In introductione ad *Curvarum Quadraturam.* Vide pag. 204. hujus.

OPUSCU-

Digitized by Google

OPUSCU-

Digitized by Google

OPUSCULUM XV.

ISAACI

NEWTONI EPISTOLA

AD

ABBATEM CONTI.

Digitized by Google

Digitized by Google

ART. I.

PARS EPISTOLÆ

SCRIPTÆ A

LEIBNITIO

AD

ABBATEM CONTI *

EN Epiſtolam, quâ uti poteris, ſi voles. Nunc ad rem. Gaudeo te eſſe in Britanniâ, ubi proficere licet; fatendum enim eſt quòd ibi ſunt doctiſſimi, & acutiſſimi viri, qui tamen haberi vellent ferè ſoli Inventores; at ut opinor, voti compotes non fient. Non conſtat NEWTONUM habuiſſe ante me Characteriſticam & Algorithmum infiniteſimalem, ut optimè cenſuit BERNOULLIUS; quanquam facilè *habere potuiſſet, ſi animum advertiſſet*, ut facilè APOLLONIUS perveniſſet ad *Carteſianam* Curvarum Analyſim, ſi animum advertiſſet. Ii, qui contra me ſcripſerunt, cùm non veriti ſint aggredi ſinceritatem meam interpretationibus longè remotis à verbis meis, & fundamento deſtitutis, impetrare non poterunt, ut reſpondeam futilibus rationibus hominum tam malignè ſe gerentium, & ceteroquin à ſcopo aberrantium. Agitur enim de Calculo Differentiali, at illi ad *Series* ſe divertunt, in quibus NEWTONUS mihi ſine dubio prævivit. Tamen denique inveni Methodum generalem, quâ *Series* eruo, & eâ repertâ, opus ampliùs non habui Extractionibus, ad quas ille confugit. Meliùs feciſſent, ſi in-

* Data fuit hæc Epiſtola ſub finem anni 1715. Comm. Epiſt. [illegible] in principio.

tegras Epiſtolas edidiſſent, ut me conſentiente Vallisius, qui nullam litem mecum habuit, ut homines illi credi vellent. Adverſarii noſtri illam *Commercii Epiſtolici Collinſiani* partem luci dederunt, quam non repugnare malis eorum interpretationibus exiſtimârunt. Novi Collinsium, cùm iterùm eſſem in Britanniâ; nam, cùm primò, ibi brevi moratus ſum, quia Miniſtrum publicum comitabar, & Geometriam abſtruſiorem prorſus ignorabam, ac ne verbum quidem audieram de mutuis Collinsii, Gregorii, & Newtoni litteris; ut ſatìs patebit ex meis Epiſtolis ad Oldemburgium, & Oldemburgii ad me, quæ ſcriptæ fuerunt circa tempus illud, & paulò poſt.

Sed, cùm ſecundò veniſſem in Britanniam, Collinsius mihi oſtendit Commercii ſui partem, ubi obſervavi Newtonum ipſum faſſum eſſe ignorantiam ſuam circa plura, &, inter cetera, eum dixiſſe nihil ſe inveniſſe de Dimenſionibus Figurarum Curvilinearum celebrium, præter *Ciſſoidis* dimenſionem. Sed omnia hæc ſuppreſſa fuerunt. Ægrè fero Newtonum, tantum Virum, nimis aſſentiendo conſiliis nonnullorum Adulatorum, qui eum mihi inimicum reddere voluerunt, incidiſſe in Doctorum cenſuram.

Ejus Philoſophia aliquantiſper paradoxa videtur, & dubito an Sectatores inventura ſit. Si omne Corpus grave eſt, *Gravitas* neceſſariò (licèt multa dicant ejus Patroni, & multùm excandeſcant) eſt aut *qualitas occulta ſcholaſtica*, aut *miraculi* effectus. Olìm Baylio probavi miraculoſum eſſe quidquid ex Creaturarum naturâ nequit explicari. Satìs non eſt dixiſſe, Deus hanc Naturæ Legem inſtituit, ergo res naturalis eſt. Oportet, ut Creaturarum vires legem hanc exequi valeant. Si Deus, exempli gratiâ, Corpori libero hanc legem impoſuiſſet, ut verteretur circa aliquod Centrum, oporteret ut, aut adderet alia Corpora, quæ illud impellendo ſemper retinerent in orbe circulari; aut Angelum illi alligaret; aut denique Deus ipſe ratione quâdam extraordinariâ ad hoc faciendum concurreret; nam, per ſuam naturam Corpus illud ab Orbe per Tangentem dilaberetur. Deus perpetuò agit in Creaturis earum naturas ſervans, & hæc ſervatio eſt continua productio earum rerum, quæ Creaturarum perfectiones ſunt. Deus eſt *Intelligentia ſupramundana*, non eſt enim Anima Mundi, & *Senſorio* non eget.

Digitized by Google

Rationes à Newtono ejúſque Sectatoribus allatæ demonſtrare mihi non videntur *Vacuum*; non inquam, magis quàm Gravitatem illam, quam ſibi univerſalem perſuadet, aut Atomos. Tenuitate dumtaxat ingenii impellimur in Vacuum, & Atomos. Clarkius diſputat contra *Carteſianorum* ſententiam, affirmantium Deum deſtruere non poſſe materiei partem, ut Vacuum efficiatur; ſed miror eum non videre, quòd, ſi ſpatium eſt ſubſtantia à Deo diverſa, eadem redit difficultas. Aſſerere autem Deum eſſe ſpatium eſt Deo partes tribuere. Spatium eſt quidem aliquid, ſed ut Tempus; utrumque enim eſt generalis rerum ordo; nempe ſpatium Ordo rerum ſimul exiſtentium, & Tempus Ordo rerum ſucceſſivè exiſtentium; vera quidem ſunt hæc, ſed phantaſtica, ut Numeri.

Materies ipſa ſubſtantia non eſt, ſed tantùm *ſubſtantiatum*, Phænomenum benè fundatum, & quod nunquam fallit eos, qui progrediuntur ratiocinando juxta Leges phantaſticas Arithmeticæ, Geometriæ, Dynamicæ, &c. Omnia, quæ de his aſſero, demonſtrata videntur. Sed ecce alia quædam, quæ mihi in mentem revocat mentio, quæ injecta eſt de Dynamicâ, aut virium ſcientiâ. Miror Newtonum, ejúſque Diſcipulos ſibi perſuaſiſſe, quòd Deus ita malè machinam ſuam conſtituit, ut, niſi extra ordinem ei manus admoveat; automatum moveri quàm primùm deſiturum ſit. Extraordinariam voco omnem Dei operationem, quæ verſatur circa aliud quàm circa Creaturarum naturas conſervandas. Igitur, quanquam eorum methaphiſica ſuppellex curta, & mathematica ſatìs parabilis mihi videatur, attamen plurimi facio Phiſico-Mathematicas Newtoni Meditationes; túque, optimè de Publico merebis, ſi magnum hunc Virum exorabis, ut edat ipſas conjecturas ſuas de Phyſicâ. Optimum conſilium puto educere, ut ille facit, è Phænomenis, omnia, quæ inde confici poſſunt, nihil ſupponendo, quanquam aliqua non liceret aſſequi niſi per conjecturas. Tamen, quando *Data* non ſufficiunt, fas eſt, (ut aliquando fit cùm explicantur incognitæ Epiſtolarum notæ,) Hypotheſes fingere, quæ, ſi felices ſunt, interim retinentur, quoad nova experimenta ſufficiant nobis *nova Data* aut ea, quæ Baconus appellat *Experimenta Crucis*, quibus optima Hypotheſeón ſeligitur. Cùm mihi relatum fuerit aliquos *Anglos* meam Philoſophiam malè

repreſentâſſe in eorum *Tranſactionibus*, non dubito, quin his quæ nunc ſcribo, defendi poſſim. Valde faveo Philoſophiæ experimentali, ſed ab eâ NEWTONUS longè aberrat, aſſerens omnem materiem eſſe gravem, (aut quamcunque materiæ partem aliam attrahere,) quod experimenta nullo pacto confirmant, ut optimè cenſuit HUGENIUS. Materia gravifica habere non poteſt hanc gravitatem, cujus cauſa eſt, & NEWTONUS nullum affert experimentum, nullam rationem ſufficientem, unde probentur aut Vacuum, & Atomi, aut mutua generalis Attractio, ſed non ideo, quia non hactenus perfectè, & ſigillatim novimus, quomodo efficitur gravitas, aut vis elaſtica, vel magnetica &c., non ideo, inquam eas referre licet inter qualitates occultas ſcholaſticas, aut inter miracula; & multò minùs licet terminis circumſcribere Dei ſapientiam, & potentiam, illíque tribuere *Senſorium* aliquod, & ſimilia. Ceterùm, miror NEWTONI ſectatores nihil edere, quod fidem faciat eos ab illo accepiſſe bonam Methodum. Felicior quidem fui Diſcipulis. &c.

ART. II.

Digitized by Google

ART. II.

EPISTOLA
SCRIPTA A
NEWTONO
AD
ABBATEM CONTI

Quâ reſpondetur ſuperiori Epiſtolæ LEIBNITII.

Londini 26. Febr. 1716. V. S.

HAUD ignoras *Commercium Epiſtolicum* continere Epiſtolas, & alia ſcripta jam antiqua, quæ aliquo pacto pertinent ad negotium, de quo diſputant LEIBNITIUS, & KEILLIUS, & quæ ſervata fuerunt, aut in Tabulariis *Regiæ Societatis*, aut in COLLINSII Bibliothecâ; neque ignoras hæc ſcripta collecta, & edita fuiſſe à frequenti Virorum illuſtrium ex diverſis nationibus conventu, quem ad hanc rem convocaverat Regia Societas. LEIBNITIUS hactenus reſponſum huic commercio negavit, optimè ſciens res de facto nullâ reſponſione poſſe infirmari. Silentium ſuum excuſaturus principio cauſatus eſt ſe non vidiſſe librum hunc, nec ſibi ſatis otii eſſe ad illum perlegendum: dixítque ſe curam hujus rei commiſiſſe celebri cuidam Mathematico. Reſponſum, quod Mathematicus ille, verus aut fictus, dederat die 7 *Junii* 1713, inſertum fuit Libello famoſo ſcripto die undetriceſimo Menſis Julii ejuſdem anni, & edito in *Germaniâ*, ſine nomine nec Auctoris, nec Typographi, nec loci, quo excuſus fuerat. Omnia hæc deinde in gallicam linguam verſa fuerunt, & inſerta Epiſtolæ ejuſdem ſtili, &, ut videtur, ejuſdem Auctoris; hiſce reſpondit KEILLIUS menſe Julio 1714; neque hactenus huic quidquam reſponſum fuit.

Novâ

Novâ nunc excuſatione utitur LEIBNITIUS, ne reſpondeat; non vult ſcilicet adeò *Anglis* morem gerere, ut reſpondeat futilibus eorum rationibus. Nihilominus, ut me in diverticulum conjiciat, conatur me diſputationibus Philoſophicis implicare, & mihi proponit Problemata ſolvenda, ſed hæ diſputationes, & hæc Problemata nihil ad rem.

Si quis vellet ad examen revocare ejus Philoſophiam, non difficulter oſtendere poſſet LEIBNITIUM ab uſu communi detorquere ſignificationem verborum, dum exempli gratiâ, appellat *Miracula*, ea, quæ fiunt, naturâ leges ſuas, ut ſolet, ſervante; dum notat nomine *Qualitatum occultarum*, ea, quarum cauſæ latent; aut dum vocat *animam*, id quod non animat corpora humana.

Oſtendi poſſet, quod ejus *Harmonia præſtabilita*, eſt verum miraculum, & adverſatur experientiæ omnium hominum; cùm quiſque gaudeat facultate videndi ſuiſmet oculis, & movendi ſuum corpus, ut libet. Meritó reprehendi poſſit, quòd poſt-habeat Hypotheſibus inductiones ductas ab experimentis; quòd me criminetur, mihi tribuens ſententias, in quas nunquam fui, & quòd proponat Hypotheſes, quas recipi vult antequàm ponderentur; cùm proponere deberet quæſtiones experimentorum examini ſubjiciendas, priùſquàm in Phiſicâ recipiantur. Sed hæc nihil ad *Commercium Epiſtolicum*.

Quæritur Conſenſum ſe non æquum prodidiſſe, dum omittit quædam contra me facientia; ſed quærimoniam ſuam non probat. Affert ille quidem verba deſumpta ex unâ mearum Epiſtolarum, quibus fatebar ignorantiam meam, & quæ omiſſa fuiſſe aſſerit; ſed hæc verba ſunt in *Commercio* pag. 74. * verſic. 10. 11, nec me hujus confeſſionis pudet. Cùm tamen COLLINSIUS LEIBNITIO iterum Londinum viſenti menſe Octobri 1676. hæc verba oſtenderit, patet LEIBNITIUM eundem vidiſſe Epiſtolam, in quâ ſcripta erant hæc verba, & quæ data fuerat A. D. viceſimum quartum. Octob. 1646. Hæc autem Epiſtola, quin-etiam aliæ præcedentes, continent deſcriptionem meæ Methodi Fluxionum. Inſuper

* Primæ editionis, ſcilicet; ſed ſecundæ pag. 153, verſiculo penultimo & ultimo. & Opuſc. XI. pag. 338. hujus.

per hâc ipſâ Epiſtolâ continetur deſcriptio duarum Methodorum generalium pro *Seriebus* obtinendis, in quarum alteram jus aliquod modò ſibi vindicat LEIBNITIUS.

Certè perſuaſum habes; quòd Æquitas poſtulat ut LEIBNITIUS ſibi conſtet, & nunc fateatur, quæ ante hos quindecim annos fatebatur, nec inficias eat quæ tunc concedebat.

In Epiſtolâ datâ A. D. viceſimum Maii 1675. fatebatur ſe ab OLDEMBURGIO accepiſſe litteras datas A. D. decimum quintum Aprilis, quæ complectebantur plures Series convergentes; idémque nunc eum faſſurum ſpero. Plures Clari Viri ex *Italiâ*, *Galliâ*, & *Germaniâ*, & tute inter alios, vidiſtis litteras autographas, & eas quæ hinc deſumptæ fuerunt, & quæ ſimul repoſitæ fuerunt in thecâ papyrorum Regiæ Societatis; igitur diffiteri non poteſt ſe vidiſſe Seriem *Gregorianam*, quæ eſt in ipſis OLDEMBURGII litteris datis A. D. decimum quintum Aprilis 1675, & in *Gregorianis* datis A. D. Decimum quintum Februarii 1671.

In Epiſtolâ datâ A. D. duodecimum Maii 1676. quæ lecta fuit ab iiſdem Viris, fatebatur ſe non compotem eſſe Methodi, quâ extunditur ea Series, quæ exprimit Arcum ex Sinu, nec quæ Sinum ex Arcu; Hoc autem erat fateri, ſe has Series ignorâſſe, cùm daret Epiſtolam A. D. viceſimum ſextum Octobris 1674., idem nunc eum faſſurum ſpero.

In reſponſione, quam dederat ad FATIUM, & quam impreſſam videmus in Actis *Lipſienſibus* Maii 1700, cùm FATIUS dixiſſet me eſſe primum Inventorem, & LEIBNITIO pluribus annis præiviſſe, LEIBNITIUS fatetur, ſe neminem ſcire, qui habuerit Methodum Fluxionum, aut Differentiarum ante me, & ipſum, & neminem editis libris probâſſe, ſibi hanc Methodum innotuiſſe; me hanc Methodum habuiſſe, antequàm ille eam vulgâſſet, quin-etiam antequàm in *Germaniâ* nemini illam tradidiſſet. Fatetur meum librum de *Principiis* oſtendere, me hâc Methodo frui, eundémque continere prima, quæ edita eſſent, ſpecimina applicationis Methodi hujus ad difficiliora Problemata. Spero igitur LEIBNITIUM ſemper idem faſſurum. Non negabat tunc, quæ aſſeveraverat FATIUS; ſi nunc negat, dici poterit eum malâ fide agere.

In unâ ex ejus Epiſtolis datâ A. D. ſeptimum Maii 1693, quæ nunc eſt in Scriniis Regiæ Societatis, legi poſſunt hæc verba. *Mirificè ampliaveras Geometriam tuis Seriebus, ſed edito Principiorum Opere, oſtendiſti patere tibi, quæ Analyſi receptæ non ſubſunt. Conatus ſum ego quoque, notis commodis adhibitis, quæ Differentias, & Summas exhibent, Geometriam illam, quam Tranſcendentem appello, Analyſi quodammodo ſubjicere; nec res malè proceſſit.* Debet nunc quoque mihi tribuere, quæ tunc tribuebat.

In Epiſtolâ datâ A. D. viceſimum primum Junii 1677, quâ reſpondet ad meam datam A. D. viceſimum quartum Octobris 1676, ait mecum ſentire, quòd Methodus, quâ Slusius utebatur ad Tangentes ducendas, perfecta nondum erat, quâ occaſione deſcripſit Methodum Differentialem, quâ Tangentes determinat, & quæ ipſiſſima eſt, quam Barovius divulgaverat anno 1670; ſed, quia hanc Methodum ſibi tribuebat, eam aliquantiſper texit novâ notatione, ac oſtendit, quòd magis extendi, & Methodo à me deſcriptæ æquari poterat; Inde inferens Methodum ſuam à meâ non adeò differre; cùm preſertim ea quoque Quadraturas faciliores redderet. Hujus Elementa tradidit in Actis *Lipſienſibus Octobris* 1684, addens eam ſe extendere ad Problemata difficiliora, quæ facilè ſolvi non poſſent ſine hac, aut aliquâ ſimili Methodo. Tunc igitur temporis fatebatur, me, cùm ſcriberem Epiſtolam de quâ ſupra, datam A. D. viceſimum quartum Octobris 1676, compotem eſſe Methodi æquè vaſtæ ac ſua; quapropter id, ut æquum eſt, nunc pariter fateri debet, præſertim, cùm jam explicatæ ſint tùm ſecretæ notæ, quæ erant in hac Epiſtolâ, tum quædam alia, quæ ad hanc Methodum referuntur, & cùm Compendium, de quo ibi mentio fit, editum ſit.

Dicebat in Epiſtolâ datâ A. D. viceſimum ſeptimum Auguſti 1676, ſe non credere meas Methodos tam eſſe generales, quàm ego affirmabam in Epiſtolâ à me datâ A. D. decimum tertium Junii præcedentis, & dari Problemata adeò difficilia ut neque Æquationibus, neque Quadraturis ſubjicerentur, quale, inter cetera, eſt inverſum Problema de Tangentibus; His verbis patet Leibnitium fateri ſe nondum inveniſſe rationem revocandorum Problematum ad Æquationes,

tiones Differentiales. Quod tunc ipſe fatebatur, fatentur etiam Acta *Lipſienſia* Aprilis 1691 paginâ 198, & ipſe nunc pariter, ut æquum eſt, fateri debet.

Wallisius in Præfatione ad duo prima ſuorum Operum Volumina edita anno 1695 indicat me meis Litteris ſcriptis per annum 1676 explanaviſſe Leibnitio Methodum, ut eam voco, Fluxionum, &, ut ille, Differentialem, méque inveniſſe hanc Methodum decem annos antea (id eſt, anno 1666, aut antea). Cùm autem Leibnitius ex illo tempore habuerit cum Wallisio Commercium Epiſtolicum, nec iis, quæ Wallisius aſſeruerat, repugnaverit, imò nihil, quod reprehenderet, invenerit, ſpero eum nunc quoque conſenſurum.

Sed, quia jam-dudum accuſationem mihi intentavit, quâ Plagiatûs inſimulor, ſi in eâ perſiſtit, debet eam, juxta leges conſtitutas, probare, alioquin calumniæ reus habebitur. Hactenus ſatìs duxit dare ad eos, ad quos ſcribit, litteras plenas affirmationum, querelarum, & cogitationum nihil probantium. Sed Actor eſt, & probare debet id, cujus reum me dicit.

Ab his ſingillatim tractandis abſtineo, quia rem totam cognoſcere potes ex *Commercio Epiſtolico*; & ex ejus *Recenſione*, ad quæ remitti non ægrè feres. Tuus &c.

Digitized by Google

OPUSCU-

Digitized by Google

OPUSCULUM XVI.

ISAACI NEWTONI

NOTÆ

IN EPISTOLAM

LEIBNITII

AD

ABBATEM CONTI.

Digitized by Google

Digitized by Google

ART. I.

EPISTOLA
LEIBNITII
AD
ABBATEM CONTI

Quâ reſpondetur ſuperiori NEWTONIANÆ

Hannoveræ A. D. 9. Aprilis An. 1716.

AMORE procul-dubio Veritatis provinciam ſuſcepiſti mihi mittendi quendam, quaſi libellum provocatorium à NEWTONO. Manum conferere nolui, cum militibus emiſſariis, quos in me compulerat, nempe, neque cum eo, qui ſe Accuſatorem geſſit *Commercio Epiſtolico* innixus, neque cum eo, qui Præfationem acerbitatis plenam præmiſit recenti Editioni ejus *Principiorum*; nunc autem, cùm ipſe in Arenâ deſcenderit, illi ſatisfacere geſtio.

Hujus diſputationis initio miratus ſum me dici Aggreſſorem; non enim memineram me de NEWTONO minùs humaniter & officioſè locutum. Sed deinde vidi in hunc ſenſum detorqueri quædam verba, quæ ſunt in *Actis Lipſienſibus* Januarii 1705; ſcilicet: Pro *Differentiis* Leibnitianis D. NEWTONUS *adhibet, ſempérque adhibuit Fluxiones.* Ubi Auctor Obſervationum in *Commercium Epiſtolicum* ait, *pag.* 108.* *Senſus verborum eſt, quòd* NEWTONUS *Fluxiones Differentiis* Leibnitianis *ſubſtituit.* Sed hæc eſt maligna interpretatio hominis rixandi cauſam aucupantis; cui obviam ire voluiſſe

* Editionis prioris; & pag. 223, Editionis ſecundæ.

voluiſſe videtur Auctor verborum, quæ in Actis Lipſienſibus ſunt; dicit enim, quaſi ob id ipſum, *adhibet, ſempérque adhibuit*; innuens NEWTONUM, non poſt viſas Differentias meas; ſed jam antea, Fluxiones uſurpaviſſe. Quis unquam tribuere poterit his verbis, *ſempérque adhibuit*, ſenſum à meo diverſum, nec rationi averſantem? ſed verbum *ſubſtituit* adhibetur, cùm ſermo eſt de iis, quæ P. FABRIUS fecit poſt CAVALLERIUM. Unde ſequitur, quòd, aut NEWTONUS ſe decipi paſſus eſt ab aliquo, qui acerbiorem ſignificationem ſubfinxit his Actorum verbis, quæ divulgata me conſcio putabantur, ſéque credidit Plagiatûs accuſari; aut libentur arripuit oblatam anſam ſibi tribuendi, vel curandi, ut alii tribuerent ipſi, ceteris excluſis, inventionem novi hujus Calculi, (quem benè vertiſſe, & totum Orbem impleviſſe videbat,) contra ea, quæ ſciebat, & faſſus erat in ſuis *Principiis paginâ* 253 primæ Editionis. Si quis ſe ſcrupulum, aut quærimoniæ cauſam in verbis *Actorum Lipſienſium* inveniſſe teſtatus eſſet, perſuaſum habeo, eos, qui ad hæc *Acta* ſcribenda conveniunt, ſcrupulum omnem remoturos fuiſſe; ſed putares quæſitam eſſe cauſam concertandi.

De frequenti Virorum Illuſtrium è diverſis Nationibus conventu, quem ad hanc rem convocaverat Regia Societas, ne verbum quidem audieram; Nam, de eo certior factus non fueram, & hodie quoque ignoro nomina plurium ex iis, quibus conſtat, & præſertim eorum, qui ex Inſulis Britannicis non ſunt. Non credo iis probari omnia, quæ ſunt in libro in me edito.

Facilè poteſt intelligi, quòd *Commercium Epiſtolicum* ad me *Vindobonæ* morantem delatum fuerit aliquandiu, poſtquam editum fuerat, licèt de eo mihi renuntiatum fuiſſet; quod ſciens Amicus quidam non minùs mei ſtudioſus quàm NEWTONI ejuſdem adjutores, edidit ſcriptum à NEWTONO vocatum *famoſum*; cujus tamen meritò queri non poteſt NEWTONUS, cùm vehementius non ſit iis, quæ contra me divulgata fuerant. Si Scripti hujus Auctor, & locus quo impreſſum fuerat, ſilentio teguntur, ſatìs nota ſunt nomen, & domicilium egregii illius Mathematici, qui ſcripſit Epiſtolam ibi relatam, & qui, à me rogatus, ſententiam de Commercio dixit; quod ſufficit; NEWTONUS, (cujus ſectatores

res

Digitized by Google

res non latet hujus Mathematici nomen, ut ipſi oſtenderunt,) eum appellat Mathematicum verum aut fictum, & cùm totis viribus, ſed incaſſum, ad ſua caſtra illum trahere conatus fuerit, eum ſpernit, contra omnium, hunc inter primi ordinis Mathematicos referentium, ſententiam & contra rerum evidentiam, quas ejus inventa confirmant.

Cùm tandem in manus venit *Commercium Epiſtolicum*, vidi nihil eſſe in illo, quod ad rem faceret, litteráſque, quas complectitur ne verbum quidem habere, unde dubitari poſſit quin ego invenerim Calculum Differentialem, de quo agitur. Eo negotio prætermiſſo, obſervavi quòd totus liber verſatur circa *Series*, quarum gloria NEWTONO permittitur, & quòd obſervationes conſtant interpretationibus inſulſis, aliquando ridiculis, aliquando etiam contra conſcientiam aliquorum ex iis, qui eas fingebant vel probabant, fictis, quibus quærebatur, ut ego futilibus ſuſcipionibus lacerarer.

Ut ergo de verbo ad verbum reſponderem libro in me edito, opus fuiſſet alio libro magno, ſaltem, æquè ac ille erat; opus erat ſingillatim retractare innumeras puſillas res geſtas ante hos triginta, aut quadraginta annos, quarum fermè oblitus fueram; opus erat requirere veteres Epiſtolas, quarum plures, (ne dicam, quòd plerumque mearum exemplaria non ſervavi,) amiſſæ ſunt; reliquæ autem ſepultæ jacent ſub magno chartarum acervo, quem ut in ordinem redigerem, opus habebam otio & patientiâ. Otium autem deficiebat me occupationibus alterius generis diſtentum.

Præterea, obſervavi, quòd in *Commercii Epiſtolici* editione ſuppreſſa fuerant Loca, quæ contra NEWTONUM facere poterant, cùm nihil prætermiſſum fuerit, quod in me converti poſſe putaretur interpretationibus à verborum ſenſu alienis. Cùm non dignatus fuerim attentiùs legere *Commercium Epiſtolicum*, mirum non eſt me exemplum perperam attuliſſe, quia ſcilicet illud nòn videram, aut me vidiſſe oblitus fueram. Sed aliud afferam. NEWTONUS in quâdam ex ſuis Epiſtolis ad COLLINSIUM datis fatebatur ſe conficere non poſſe Problema de ſectionibus ſecundis, (aut ſegmentis ſecundis) ſphæroidum aut ſolidorum ſimilium; ſed locus hic, vel hæc Epiſtola deſideratur in *Commercio Epiſtolico*. Candidiùs erga Diſputantes, & utiliùs erga Publicum editum fuiſſet *Commercium Epiſtolicum* COLLINSII totum, ſ.ltem, ubi contine-

bat aliquod ſcitu dignum, Epiſtolis præſertim non mutilatis; perpaucæ enim reſtant inter mea ſcripta, aut quarum Exemplaria habeam.

Omnibus itaque conſideratis, tot indiciis perſpiciens eos malignè ſe præſtare, nodùmque in ſcirpo quærere, rem me indignam facturum putavi, ſi manum conſerem cum hominibus tam fædè ſe gerentibus. Videbam, quòd in iis refellendis difficile fuiſſet abſtinere ab objurgationibus, & verbis acerbitatis plenis, qualia debebantur eorum inſtituto, neque hoc ſpectaculum Populo dare volebam, ad meliora deſtinans Tempus, cujus ſumma ratio mihi habenda eſt, & ſatis contemnens judicium eorum, qui hoc libro innixi, contra me ſententiam dicere non verebuntur; præſertim cùm ipſa Regia Societas nihil ſtatuere voluerit, ut didici ex Epitome ejus Tabularum.

Non puto me dixiſſe, (quòd NEWTONUS mihi tribuit,) quòd *nolo* Anglis *adeò morem gerere, ut reſpondeam futilibus eorum rationibus*; non enim, opinor, omnes *Angli* ſuam ducunt NEWTONI cauſam; nam, non deſunt, qui tam polleant ingenio & comitate, ut ſe totos tradere nolint affectibus, quibus nonnulli ex ejus Fautoribus urgentur.

NEWTONUS præterea me incuſat, quòd eum in diverticulum conjicere voluerim ſuam Philoſophiam impugnans, & Problemata proponens; ſed de Philoſophiâ, meorum Principiorum partem edidi, ſua non aggreſſus; aliqua tantum verba de iis injeci nonnullis Epiſtolis, cum id occaſio poſtularet, & anſa mihi data fuerit. De Problematibus autem; longè abſum ab iis NEWTONO proponendis; cùm egomet ea recuſaturus ſim, ſi mihi proponantur: ab iis abſtinere nobis per ætatem licet; ſed nobis ſunt amici, qui vicem noſtram implere poſſunt.

Hic ſingillatim recenſere nolo; ea, quæ acerbiùs in meam Philoſophiam, aut pro ſuâ loquitur NEWTONUS. Hujus Diſputationis locus hic non eſt. *Miraculum* appello omne id, quod fieri nequit niſi Creatoris potentiâ, cùm Creaturarum natura ejus Rationem non complectatur, &, quando hoc nihilo-minus tribuitur qualitatibus, aut viribus Creaturarum, tunc voco hanc Qualitatem *Qualitatem occultam Scholaſticam*, quæ ſcilicet detegi non poteſt. Hujus generis eſſet Gravitas primitiva. Nam, Qualitates occultæ, quæ fictitiæ non ſunt, eæ ſunt, quarum cauſam ignoramus quidem,
ſed

ſed non excludimus. *Animam hominis* appello ſubſtantiam illam ſimplicem, quæ percipit ea, quæ fiunt in Corpore humano, & cujus appetitus, aut voluntates ſubſequuntur Corporei conatus. *Hypotheſibus* non poſthabeo *Argumenta* ducta per inductionem ab experimentis; ſed nonnunquam obtruduntur peculares obſervationes tanquam inductiones generales, & inter Hypotheſes rejiciuntur propoſitiones demonſtrativæ.

Harmonia mea præſtabilita, quam hìc NEWTONUS repræſentat, eadem non eſt, ac illa, quam norunt plures acuti Viri extra Britanniam; nonnulli etiam in ipſâ Britanniâ: túque ipſe, opinor, eam hoc vultu non vidiſti, neque hodie vides, niſi fortè vehementer mutatus ſis ab illo, qui quondam.

Nunquam inficiatus ſum me, dum iterùm eſſem in Britanniâ, vidiſſe apud COLLINSIUM aliquas NEWTONI Epiſtolas; ſed nullas vidi, nec dum video in *Commercio Epiſtolico*, ubi NEWTONUS ſuam Fluxionum Methodum explicuerit.

Sed neque vidi ab eo explanatam Methodum ad *Series* ſpectantem, quam mihi vindico; puto eum intelligere de illâ, quæ conſiſtit in aſſumptione *Seriei* alicujus ad libitum; hanc Methodum uſurpaveram antequàm iterum Britanniam petiſſem; neque tamen affirmo NEWTONUM eam habere non potuiſſe; quinimo non ita difficile erat illam inveniſſe.

Vult NEWTONUS, ut fatear, & concedam, quæ faſſus ſum, vel quæ conceſſeram ante hos quindecim annos; quod ſi negem, confici, inquit, poterit me agere malâ fide. Idem ab ipſo expectari, poterit jam enim prætererunt bis quindecim anni, ex quo in primâ ſuorum *Principiorum* Editione *paginis* 253, 254, concedit me inveniſſe Calculum Differentialem, ſine ſuæ inventionis auxilio; ſed poſtea, neſcio quomodo, animum induxit, ut per alios huic conceſſioni adverſaretur.

Sciendum eſt, quòd, cùm primò eſſem in Britanniâ anno 1673, prorſus ignorabam *Series infinitas*, quales MERCATOR nuper ediderat, æquè ac alia pertinentia ad Geometriam novis Methodis ampliatam; nequidem ſatis verſatus eram in Analyſi *Carteſianâ*. Mathematica tractabam tanquam *Parergon*, & pauca noram præter *Cavallerianam* indiviſibilium Methodum, & quendam librum Patris

LEOTALDI, in quo erant Quadraturæ Lunularum, & ſimilium Figurarum, unde mihi quoddam ulteriora cognoſcendi deſiderium.

Sed maximè delectabar Numerorum Proprietatibus, quarum perſcrutandarum occaſio fuerat Libellus, quem penè puer edideram Anno 1666 de Arte Combinationum. Et, cùm jam tum animadvertiſſem quàm utiles eſſent Differentiæ ad inveniendas Summas, has Differentias ad Series Numerales traduxi. Primæ ex mutuis litteris *Oldemburgicis*, & meis, ſatìs oſtendunt me tunc vix ulteriùs progreſſum. Neque tum COLLINSIUM noveram, ut malignè fingitur.

Cùm *Lutetiæ Pariſiorum* familiariter HUGENIUM inviſerem, is me paulatim his myſteriis initiavit; Hæc inſtitutio, & MERCATORIS liber, quem ex Britanniâ mecum attuleram, quia mihi de eo PELLIUS locutus fuerat,) viam aperuerunt ad inveniendam ſub finem anni 1673 meam arithmeticam Circuli Quadraturam, quam valdè HUGENIO approbavi, & de quâ ſermonem feci OLDEMBURGIO in litteris anni 1674. Tunc autem HUGENIUS, aut EGO ne verbum quidem audiveramus de *Seriebus Newtonianis*, vel *Gregorianis*. Itaque me primum credidi, (credidit etiam HUGENIUS), expoſuiſſe Aream Circuli Serie Numerorum rationalium. Hujus ſenſûs Epiſtolas ad OLDEMBURGIUM dedi, qui reſpondit jam hujuſmodi *Series* notas eſſe in Britanniâ; cujus rei me tunc ignarum eſſe facilè judicari poteſt ex Epiſtolâ à me datâ A. D. decimum quintum Julii An. 1674 & ex eâ, quam ad me reſcripſit OLDEMBURGIUS A. D. octavum Decembris An. itidem 1674. Nam, ſi OLDEMBURGIUS, & COLLINSIUS, antea de his Seriebus me monuiſſent, ille id ipſum mihi in mentem revocâſſet. Tunc igitur tantùm aliqua de *Seriebus* audivi; ſed adhuc neſciebam tùm rationem extrahendi Radices Æquationum per Series, tùm Regreſſiones, aut Extractionem Æquationis infinitæ. Aliquantiſper tunc eram harum rerum rudis. Attamen ſtatim inveni meam Methodum generalem per *Series* arbitrarias; & demum perveni ad meum Calculum Differentialem, ad quem penitiùs introſpiciendum non inutilia fuerunt ea, quæ, penè puer, obſervaveram de Differentiis Serierum numeralium; Nam, ad hunc Calculum perveni, non per Linearum Fluxiones, Sed per Numerorum Differentias, animadvertens tandem, quòd hæ Differentiæ applicatæ Quantitatibus perpetuò creſcentibus, evaneſcunt relativè ad

Digitized by Google

ad Quantitates differentes, quanquam ſuperſint in Seriebus numerorum. Et hanc viam magis analyticam exiſtimo. Cùm geometricus Differentiarum Calculus, qui idem eſt ac Calculus Fluxionum, ſit caſus peculiaris Calculi analytici Differentiarum in genere, qui caſus peculiaris commodior fit ob Differentias evaneſcentes.

Deinde NEWTONUS affert loca, in quibus concedo eum noviſſe Calculum meo Differentiali ſimilem; ſed meminerit, quæſo, ſe mihi tantundem tribuiſſe; ſi verò illi palinodiam canere licet, cur ego veter? Præcipuè poſt veriſimilitudines à BERNOULLIO obſervatas. NEWTONUM adeò candidum putaveram, ut nudum ejus verbum fidem apud me faceret; ſed dubitare, (ut æquum eſt,) cœpi, & ex quo illum conniventem vidi in accuſationibus, quas ipſemet falſas ſciebat.

Hodie non poſſum neque fateri, neque diffiteri me ſcripſiſſe, aut recepiſſe Epiſtolas datas ante hos quadraginta annos, ejuſdem tenoris, ac quæ editæ ſunt. Cogor me referre ad ea, quæ ſunt in ſcriptis allatis, ſed nihil contra me invenio in Epiſtolis datis A. D. decimum quintum Aprilis, & viceſimum Maii An. 1675, ac viceſimum quartum Octobris An. 1676, quas NEWTONUS allegat, præter Interpretis mendacia. Si quas Demonſtrationes, aut Methodos perveniendi ad aliqua, ad quæ proprio Marte pervenire facilè potuiſſem ab OLDEMBURGIO petivi, ideo tantùm, puto, feci, quia tunc rebus à Matheſi valde diverſis me totum dabam, vivens ſcilicet *Lutetiæ Pariſiorum*, & quia à Calculis, quorum longitudine terrebar, vehementer abhorrebam. Exempli gratiá, credo me ante diem duodecimum Maii An. 1676 adeptum fuiſſe meam Methodum *Seriei* arbitrariæ, quâ manuduci potuiſſem ad *Series*, quarum Demonſtrationem poſtulabam. Nam, Serie arbitrariâ utor in veteri illo libello de Quadraturâ Arithmeticâ, quem perfeceram antequam è Galliâ exiiſſem. Tamen eſto; alteri debeam *Series* de quibus meminit hæc Epiſtola, & quas me etiam ignoráſſe credo Anno 1674.

Cùm non ſatis intelligerem, quæ NEWTONUS dicit de *Actis Lipſienſibus* Maii Ann. 1700., librum illum conſului, & perſpicio eum non benè, quæ ibi dicta ſunt, percepiſſe. Nam, illic ne verbum quidem de inventione novi Calculi Differentialis; ſed agitur de arte quadam peculiari pro *maximis, & minimis* determinandis,

Digitized by Google

quæ ab eo non pendet, & mihi in mentem venerat multo antequam BERNOULLIUS proponeret Problema de breviori deſcenſu, & quam exiſtimaveram NEWTONO quoque in mentem veniſſe, cùm daret Figuram ſuæ navis in *Principiis* ſuis. Itaque volui dicere eum ſe palàm ante me oſtendiſſe hujus Artis compotem, quod affirmare nequibam de Calculo Differentiarum, & Fluxionum, quia ejus utilitatem propalaveram ante libri illius editionem. Hæc ars peculiaris de *Maximis, & Minimis*, neceſſaria non eſt, quando agitur de Quantitate ſimplici, tunc enim FERMATII Methodus, perfectior reddita novis Calculis, ſufficit; ſed aliud quid requiritur, cùm petitur tota Figura, quæ omnium optimè efficere debet id, quod poſtulabatur.

Hìc NEWTONUS novam accuſationem temerè intentat, quæ in eum recidet. Affirmat quòd, quæ ipſi communicanda ſcripſeram ad OLDEMBURGIUM Anno 1677, omnino ſunt Methodus *Baroviana* perſonata. Cùm autem NEWTONUS fateatur in primâ *Principiorum* ſuorum Editione, *paginis* 253, & 254 me *ipſi* (tunc *Methodum commmnicâſſe à Methodo ipſius vix abludentem, præter quàm in verborum, & notarum formulis*; ſequitur quòd ejus Methodus pariter nihil eſt niſi *Baroviana* perſonata.

Exiſtimo illum, & me facilè abſolutos iri ab hac accuſatione; nam, vah! Quot legent librum *Barovianum*, nec in eo noſtrum Calculum deprehendent! Verum quidem eſt, quòd TSCHÜRNAUSIUS, qui paulò ſeriùs hujus Calculi commoda perſpexit, contendit omnia hæc adipiſci poſſe Methodis *Barovianis*: Ut Abbas CATELANUS Gallus dixit Analyſim *Carteſianam* ad hæc omnia ſufficere; quod facilius dici quàm oſtendi poterat.

Si quis autem noſtrûm aliquid eſt à BAROVIO mutuatus, veriſimiliùs eſt id feciſſe NEWTONUM, qui eo præceptore uſus eſt, quàm me, qui, (ni malè recordor,) libros BAROVII non videram antèquàm iterùm eſſem in Britanniâ, & qui eos nunquam attentè legi, quia, cùm in iis oculos injeciſſem, perſpexi, quòd conſiderans Triangulum Characteriſticum, (cujus Latera ſunt Elementa Abſciſſæ, Ordinatæ & Curvæ,) ſimile alicui Triangulo aſſignabili, perveneram quaſi ludens ad Quadraturas, Superficies, & Solida, quæ conficiunt unum ex majoribus Capitibus Lectionum *Barovianarum*. Præterquàm, quod ad meum Geometricum Differentiarum Calcu-

Calculum non veni, quàm poſt cognitam earum utilitatem, (quemlibet minoris momenti,) in Numeris; ut indicare poſſunt primæ meæ Litteræ, quæ ſunt in *Commercio Epiſtolico.* Fieri poteſt, ut BAROVIUS, plura ſciens, quàm quæ Libro mandârat, vias, quas ignoramus, NEWTONO aperuit. Et ſi audaculis quibuſdam ſimilis eſſem, puris, & levibus indiciis nixus, affirmare poſſem, quòd NEWTONUS à BAROVIO Calculum Fluxionum, (quicunque demum illi ſit,) didicerat.

Quæ Anno 1676 dixi de Problematibus, quæ reſolvi non poterant neque per Æquationes, neque per Quadraturas, intelligenda certè ſunt de Æquationibus tum vulgatis, de iis videlicet, quas præbet Analyſis communis; cujus indicium eſt, quòd addo Quadraturas, velut quid majus his Æquationibus: at Æquationes differentiales etiam ultra Quadraturas extenduntur; & ſatis conſtat me loqui voluiſſe de Problematibus ipſis, qui egent harum Æquationum, tum ignotarum. Hæc objectio jam erat inter Adnotationes ad *Commercium*; ſed NEWTONUM huc uſque deſcendere poſſe non credideram.

Eſt in Epiſtolà à me datà ad Diem viceſimum ſeptimum Auguſti An. 1676. *pag.* 65. * in *Commercio Epiſtolico*,) quo inducor ad credendum me tunc eſſe compotem Calculi Differentialis; ibi enim affero me ſtatim *certâ Analyſi* reſolviſſe Problema (*certâ Analyſi ſolvi*), quod BEAUNIUS CARTESIO propoſuerat. Hæc autem Analyſis erat Calculus Differentialis; ſine quo tamen ſolvi poteſt illud Problema; & ſolviſſent, puto, HUGENIUS, & BAROVIUS, ſi opus fuiſſet, ut plura alia; ſed merus jocus eſt meâ Notatione. Exiguum mendum perſpicio in hac paginâ; legitur enim † LUDUS *naturæ*, pro HUJUS naturæ; ſed hoc vetus eſt, & eſſe puto in meæ Epiſtolæ exemplo ad NEWTONUM miſſo; NEWTONUS enim huic Epiſtolæ reſpondens litteris datis A. D. viceſimum quartum Octobris An. 1676. (*paginâ 86. in Commercio*) ait *Hos caſus vix numeraverim inter ludos naturæ.* Non intellexeram, quæ dicere voluerat, ſed nunc perſpicio erroris fontem.

Hodie nequeo dicere, utrùm animadverterim verba WALLISII, in quibus aſſerit NEWTONUM jam anno 1666. cognoviſſe Methodum Fluxionum. †† Sed, etiamſi animadvertiſſem, nihil contra puto,

* Primæ editionis, ſecundæ verò pag. 129. †† Hæc ſunt infra.
† Vide ſupra Opuſc. XI. Art. I. pag. 326.

Digitized by Google

puto, dixiſſem. Tunc enim unum NEWTONI verbum fidem faciebat, ſed ejus facta me de hoc cautiorem reddiderunt.

NEWTONUS ait ſe à me plagiatûs inſimulari. Sed ubi hoc feci? imò ejus Fautores viſi ſunt hanc accuſationem in me intentâre, & ipſe in hoc connivit. Neſcio an omnino conſentiat omnibus iis, quæ illi ediderunt; ſed aſſentior ei dicenti, quòd malignitas accuſantis de hoc, & non probantis, Accuſatorem calumniæ reum facit.

In extremo ſuæ Epiſtolæ capite, me aggreſſorem appellat; ego verò in hujus initio contrarium oſtendi. Hoc prældium facilè terminari poterit. Malè aliquid intellectum fuit, ſed non meus eſt error.

Tuus &c.

POST-SCRIPTUM.

Solviſti Problema, quod NEWTONI Aſſeclæ ſolvere hactenus non potuerant; nam, reſponſum à me extorſiſti miſſâ Epiſtolâ ipſiuſmet NEWTONI. Quo facto, adhortationes omnes ſupervacaneæ ſunt. Si Quæſtio fuiſſet tantùm, uter NEWTONUS, an ego, prior inveniſſet Calculum, de quo diſputatur, planè non laboráſſem. Difficile eſt enim definire, quid, & quandiù uterque ſilentio texiſſe poteſt. Sed quidam NEWTONI Fautor contendit, me à NEWTONO Calculum hunc didiciſſe; attamen poſtea veriſimilius viſum eſt nonnullis, & ipſi BERNOULLIO, rationem computandi, quam NEWTONUS edidit in WALLISII operibus fabricatam eſſe ad mei Differentialis Calculi jam editi imitationem. Nec vola nec veſtigium Calculi Differentiarum, vel Fluxionum apparet in veteribus NEWTONI Epiſtolis, quas vidi; niſi fortè in eâ, quam dederat A. D. viceſimum quartum Octobris An. 1676; ubi etiam per ænigmata loquitur; & horum ægnimatum ſolutio, ab eo data decem poſt Annis, oſtendit quidem aliquid, ſed non omne id, quod poſtulari poſſet. Nihilominus, in NEWTONUM propenſus, olim adeó facilis fui, ut loquerer tanquam ſi omnia ab eâ detegerentur, & me ſecuti alii idem dixerunt. Sed humanitas mea malè remunerata fuit. &c.

ART. II.

Digitized by Google

ART. II.

ANIMADVERSIONES NEWTONI

In ſuperiorem LEIBNITII *Epiſtolam* AD ABBATEM CONTI.

A. D. $\frac{12}{27}$ Maii 1716.

DEfendit LEIBNITIUS in Epiſtolâ datâ A. D. undetriceſimum Decembris An. 1711. locum, qui eſt in *Actis Lipſienſibus Januarii* 1705. *paginis* 34. *&* 35.; & ſic proprium fecit, † nunc autem illum molliorem reddere fruſtra conatur, contendens verba *adhibet*, *ſempérque adhibuit* malignè interpretari verbo *ſubſtituit*; ſed ab explicatione, quam obtrudere vellet, arcet vim terminorum *igitur*, & *quemadmodum*, à quorum primo verba, *ſempérque adhibuit*, fiunt præcedentium conſectarium; ab ultimo verùm æquivalentia ipſi *ſubſtituit*; ſi autem reponas hæc omiſſa, videbis ſuſtineri non poſſe ſenſum, quem his verbis nunc tribuere conatur. Meritò igitur dixi eum ſe accuſatorem in me geſſiſſe. In duabus Litteris ab eo datis ad SLOANE A. D. quartum Martii; & undetriceſimum Decembris An. 1711, urgebat Regiam Societatem ad KEILIUM condemnandum, & me volebat cogere ad ſententiam meam aperiendam, licèt ab hoc negotio prorsùs abſtinuiſſem.

En

† In hac Epiſtolâ ait LEIBNITIUS. *Fruſtra ad Exemplum* Actorum Lipſienſium *provocat* (KEILIUS,) *ut ſua dicta excuſet; in illis enim circa hanc rem quicquam cuiquam detractum non reperio, ſed potius paſſim ſuum cuique tributum.* Commerc. Epiſtol. N°. LXXXV. pag. 219. Edit. ſecundæ.

Digitized by Google

En verba ſecundæ Epiſtolæ * : *itaque veſtræ æquitati committo*; *an non coercenda ſint vana, & injuſta* KEILII *vociferationes, quas ab ipſo* NEWTONO, *Viro inſigni, & geſtorum optimè conſcio, improbari arbitror*; *ejúſque ſententiæ ſuæ libenter daturum indicia mihi perſuadeo.* Honeſtiſſima verba; ſed quæ ſibi volunt, oportere, ut aut damnem KEILIUM, aut cum LEIBNITIO contendam, quod accidit. Ille igitur Aggreſſor eſt. Hìc enim omnes optimè norunt, me ſemper diligenter has lites vitaviſſe, quoad Regia Societas, & ego nos iis immiſcere coacti fuimus.

In Epiſtolâ datâ A. D. quartum *Martii* 1711. N. S. à Regiâ Societate enixè rogavit, ut partibus inauditis KEILIUM condemnaret; & cùm KEILIUS † pro cauſâ ſuâ dixiſſet, LEIBNITIUS ſe reſponſurum negavit **, & contendit iniquum eſſe inſtare ut reſponderet; at interea ipſe pervicaciter inſtabat, ut KEILIUS damnaretur. †† Ratio hæc, quâ LEIBNITIUS ſe gerebat, coegit Societatem ad convocandum Conſeſſum compoſitum ex ejus Membris, expenſurum vetera Scripta, quæ ad rem facere poterant, & de hoc relaturum. Quod ſi eo inſcio factum eſt, ejus culpa eſt. Nam, quæ ratio habenda erat hominis, qui à Societate vi rem extorquere volebat, contendens iniquum eſſe petere, ut *candorem* ſuum Apologiâ defenderet, & apud eam, *tanquam pro Tribunali* litigaret? ſi ei copia facta non eſt indicandi eos, quos à Conſeſſu remotos vellet; id ideo factum eſt, quia ſe defendere recuſabat; quia Conſeſſum cogere, vel eo non aſſentiente, licebat; quia ipſi jus nullum erat criminandi quæ geſta ſunt, ut ante-facta cognoſcerentur. In eum nihil hactenus decretum eſt, quia Conſeſſus non erat hominum ſub jurejurando ſententiam dicentium conventus, neque *Regia Societas* Collegium Judicum. Conſeſſus ſatis habuit examinare Epiſtolas, & alia vetera

* En verba primæ. KEILIUS *in hoc ipſo volumine* (Tranſact. Philoſoph.) menſe Sept. Oct. 1708. pag. 185. *renovare ineptiſſimam accuſationem viſus eſt*, *cùm ſcripſit* Fluxionum Arithmeticam à NEWTONO inventam, mutato nomine, & notationis modo à me editam fuiſſe. . . . Id quidem quàm falſum ſit nemo melius ipſo NEWTONO *novit*... æquum eſſe vos ipſi, credo, judicabitis, ut KEILIUS teſtetur publicè, non fuiſſe ſibi animum imputandi mihi, quod verba inſinuare videntur. Comm. Epiſtol. N°. LXXX. pag. 224. Edit. ſecund.

† Vide Comm. Epiſtol. N°. LXXXI. pag. 226. Edit. ſec.

vetera Scripta, de iis ſolùm judicavit, & LEIBNITIO reliquit plenam libertatem ſe defendendi ſi poteſt. Satìs eſt *Regiam Societatem* curaviſſe edendam hujus conſeſſûs relationem unà cum Scriptis, quibus innititur; & LEIBNITIUM nihil probare potuiſſe contra KEILIUM, licèt jam ab horum editione fluxerint tres anni, & quatuor menſes.

Ait LEIBNITIUS, quòd, cùm ejus Epiſtola, quam famoſam nominavi, acerbior non ſit iis, quæ in eum edita ſunt, de eâ queri nullo modo poſſum: ſed acerba eſt ea Epiſtola, quia referta accuſationibus, & conſiderationibus injurioſis, omni probatione deſtitutis; quæ ſcribendi ratio ſemper habita eſt indigniſſima: & uſurpata in malis cauſis defendendis. *Commercium* verò acerbum non eſt, niſi quia continet facta, quæ divulgari permittunt jus & æquum. Epiſtola edita fuit clàm, & quaſi per inſidias; ut paſſim ſit de libellis *famoſis*; compreſſum fuit nomen Auctoris, & *Mathematici*, cujus Epiſtola illi adnexa fuerat; æquè ac Typographi & Urbis, ubi impreſſa fuerat, & vix poſt duos ab editione annos audivimus Mathematicum, illum, qui dederat Epiſtolam junctam illi de quâ agitur, eſſe *Johannem* BERNOULLIUM. *Commercium* autem palam editum fuit *Londini* juſſu Regiæ Societatis.

LEIBTINIUS ponens me non ignorare, quòd Epiſtola data A. D. ſeptimum Junii 1713, & inſerta ei, de quâ memini, erat à BERNOULLIO, ægre fert me eum dixiſſe *Mathematicum*, aut *qui dicitur Mathematicus*; quod certè non dixi ut BERNOULLIUM deprimerem. Sed, cùm *Mathematicus* ille, cujus hæc Epiſtola eſt, BERNOULLIUM memorans, (& quidem cum elogio, eum enim dixerat *eximium Mathematicum*,) ſe ipſe à BERNOULLIO diverſum feciſſet; & cùm LEIBNITIUS nuper

 rurſus

** Vide Comm. Epiſtol. N°. LXXXV. pag. 239. Edit. ſec.

†† Ait enim. *Quæ* Johannes KEILIUS *nuper ad te ſcripſit, candorem meum apertiùs, quàm antè oppugnant; quem ut ego hac ætate, poſt tot documenta vitæ, Apologiâ defendam, & cum homine docto, ſed novo, & parum perito rerum ante actarum cognitore, nec mandatum habente ab eo, cujus intereſt, tanquam pro Tribunali litigem, nemo prudens æquùſque probabit.* Comm. Epiſtolic. N°. LXXXV. pag. 239. Edit. ſecund.

rurſus edens hanc Epiſtolam ſub nomine BERNOULLII, & citationem ſupprimens, aſſeruiſſet eam à BERNOULLIO datam; quem crederem? An *Mathematicum*, qui ſe BERNOULLIUM non eſſe innuebat? An LEIBNITIUM, qui *Mathematicum* hunc eſſe BERNOULLIUM ipſum contendebat?

BERNOULLIUS LEIBNITIO debet Methodum differentialem; eſt princeps ejus Diſcipulorum; pro eo pugnavit in *Actis Lipſienſibus*, antequàm vidiſſet *Commercium Epiſtolicum*: Tunc ergo erat *homo novus*, *& rerum ante-actarum parùm peritus*, ut LEIBNITIUS KEILIO objecerat. Ad ſe ipſum defendendum ſcripſit, quæ ex illo tempore ſcripſit, & tota ejus Matheſeum peritia non obſtat, quin ad partes acceſſerit in hac contentione; igitur in hac cauſâ Judex integer ſedere non poteſt.

Queritur LEIBNITIUS Confeſſum à ſcopo aberraſſe, cùm ſe ad *Series* infinitas convertit; ſed in mentem revocare debuerat duas Methodos, quibus utor, eſſe velut duos ramos unius ejuſdémque generalis Methodi Analyticæ. Eas junxeram in libello de Analyſi, quem BAROVIUS miſerat COLLINSIO Anno 1669; eas invicem miſcueram in Opuſculo, quod ſcripſeram Anno 1671, ut monueram in Litteris A. D. decimum Decembris An. 1672. & viceſimum quartum Octobris An. 1676. In Epiſtolâ à me datâ A.D. decimum tertium Junii An. 1676. dixeram meam Methodum *Serierum* ſe extendere ad ferè omnia Problemata; ſed eam generalem non evadere ſine auxilio aliarum Methodorum; quibus intelligebam, ut declaratum eſt in Epiſtolâ ſequenti, * Methodos Fluxionum, & Serierum ad arbitrium aſſumptarum. Nunc autem auferre mihi has duas Methodos, nihil aliud eſt quàm me rejicere ad Methodum Serierum, id eſt, ad Methodum minùs generalem. In Epiſtolâ meâ datâ A. D. viceſimum quartum Octobris An. 1676 omnes has Methodos ſimul ſumptas appello meam Methodum generalem, ut videri poteſt in *Commercii Epiſtolici paginâ* 86, lineâ 6. ** Cùm autem LEIBNITIO placuerit meam Methodum generalem in fruſta diſcerpere, & mihi eripere nunc partem hanc, nunc illam, & hoc

* Datâ A. D. 24. Octobris. An. 1676. Vide ſupra paginâ. 356.

** Primæ Edition., & ſecundæ pag. 189. lin. 14. vide ſupr. Opuſc. XI. pag. 356.

hoc pacto reliquum mutilare, legitimam occaſionem præbuit *Regiæ Societati*, ut Methodum hanc totam ſimul perpenderet. Animadvertendum etiam eſt, quòd ſemper ſibi ipſi teſtis eſt; Sed Teſtium fides ad trutinam revocari ſolet.

Contendit Conventum à Regiâ Societate convocatum omiſiſſe plura, quæ faciebant contra me, & edidiſſe omnia, quæ in eum converti poterant *interpretationibus à verborum ſenſu alienis*. Hæc probaturus affert in penultimis Litteris monumentum meæ ignorantiæ, quod à Conſeſſu compreſſum dicit; ſed editum nunc fatetur, ſéque per errorem contra affirmaviſſe. Habet autem aliud, quod afferat, me ſcilicet faſſum eſſe in quâdam Epiſtolâ ad COLLINSIUM datâ, quòd invenire non poteram ſecunda ſphæroidum ſegmenta; quem locum prætermiſſum aſſerit in Commercio. Meliùs quidem, puto, prætermiſſus fuiſſet; nihil enim ad rem facit; ſed res longè aliter ſe habet; Siquidem COLLINSIUS in Epiſtolâ datâ ad *Jacobum* GREGORIUM A. D. viceſimum quartum Decembris An. 1670, & in alterâ ad BERTETUM datâ A. D. viceſimum primum Februarii An. 1671., (quæ ambæ ſunt in Commercio paginis 24; & 26 †,) ait Methodum meam ire ad ſecunda ſegmenta Solidorum Rotatione genitorum. Idem LEIBNITIO ſignificaverat OLDEMBURGIUS Epiſtolâ ad Leibnitium datâ A. D. octavum Decembris An. 1674, ut videri poteſt ex *Commercio paginâ* 39 ††. Igitur LEIBNITIUS accuſavit Conventum à *Regiâ Societate* convocatum, licèt certus non eſſet de ſuæ accuſationis veritate; quæ eſt ſumma temeritas, ne quid acerbius dicam. Adeò abſuit Conſeſſus ad ſe iniquum LEIBNITIO præſtandum, ut tacuerit eum tunc Geometriæ ignarum, & omiſerit plura, quæ contra eum feciſſent; qualia ſunt duæ Epiſtolæ quæ tum apud me erant * nec non pars Præfationis additæ à VALLISIO I. Tomo ſuorum Operum Mathematicorum **. Inſuper obſervare poterant, quòd Exemplum

Eee 3 Epiſto-

† Primæ Edit., ſecundæ verò paginis 96., & 100.

†† Primæ Edit., & ſecundæ pag. 116.

* Hæ duæ Epiſtolæ datæ ad NEWTONUM à LEIBNITIO & WALLISIO Annis 1693. & 1695. ſunt in adnexâ Appendice. Vide infra.

** Hæc etiam eſt in Appendice. Vide infra.

Epiſtolæ à GREGORIO datæ A. D. 5. Septembris Ann. 1670. miſſum fuit ad LEIBNITIUM menſe Junio An. 1676. cum collectione Epiſtolarum *Gregorianarum*.

Conſeſſus affirmat in Relatione ſuâ, quòd omnia, quæ pertinebant ad negotium iis commiſſum, extracta fuerant ex Epiſtolis, Scriniis, & aliis veteribus Scriptis, quæ habebat pro fidelibus, & authenticis. LEIBNITIUS eum criminatur, quòd non ediderit Epiſtolas totas, tum quæ ſpectabant ad negotium de quo agitur, tum quæ ab eo prorsùs erant alienæ; tanquam ſi non liceret afferre, aut extrahere locum aliquem è libro quopiam, ipſo toto libro non allato. Queritur ergo non ſatis amplum eſſe *Commercium Epiſtolare*; quod tamen nimis amplum ei videtur, cùm reſpondere debet, & ait illud poſtulare reſponſum ejuſdem voluminis. Oportet igitur removere omnes authenticas tabulas, ut quæſtio degeneret in frivolas conteſtationes de Philoſophiâ, & aliis rebus nihil ad rem facientibus. Oportet, ut eximius Mathematicus ille, qui, ut meliùs videatur Judex integer, abſcondit nomen ſuum in Epiſtolâ ad LEIBNITIUM datâ A. D. ſeptimum Junii An. 1713., nunc in apertum prodeat, ſe certamini immiſceat, per LEIBNITIUM omnes *Britanniæ* Mathematicos provocet; tanquam ſi prælium ſingulare, aut forte pugna inter eos, quos ille vocat meos Milites emiſſarios, & illum Diſcipulorum exercitum, quem LEIBNITIUS jactat, meliùs definire poſſet utrius cauſa melior eſt in hac contentione, quàm vetera & authentica Scripta; & tanquam ſi in poſterum Matheſis referta eſſe deberet ampliſſimis Equitum errantium geſtis, & non rationibus, ac demonſtrationibus.

Fatetur LEIBNITIUS, quòd, cùm iterum eſſet in Britanniâ, vidit apud COLLINSIUM nonnullas ex meis Epiſtolis, & inter alias, illas, in quibus agitur de *Seriebus*, & nominatim meminit de duabus, nempè de illâ, quæ data fuerat A. D. viceſimum quartum Octobris An. 1676. & de illâ, in quâ fateor, ut ipſe dicit, ignorantiam meam circa ſecunda Segmenta. Unde ſequitur, quòd non poteſt dubitari, quin præcipuè optaverit videre Epiſtolam, in quâ erant præcipuæ meæ Series, eæ præſertim, quæ pertinebant ad rationem inveniendi *Arcûs* è *Sinu*, & *Sinûs* ex *Arcu*, earúmque Serierum Demonſtrationem; quam quidem Epiſtolam, (quæ Inſcri-

inſcribitur *Analyſis per Æquationes numero Terminorum infinitas,*) ut ſibi à COLLINSIO impetraret, OLDEMBURGIUM obſecraverat paucos ante menſes. Nihilominus dicit ſe neſcire, ubi applicaverim Methodum Fluxionum, nec ejuſdem veſtigium ſe videre in *Commercio Epiſtolico*; in quo tamen ſunt tum hæc *Analyſis*, cum Epiſtolæ à me datæ A. D. decimum Decembris An. 1672; decimum tertium Junii An. 1676; & viceſimum quartum Octobris Anni pariter 1676. Puto eum ideo dicere, quòd hanc Methodum ibi non videt, quia nulla ibi eſt Littera puncto aucta. Eodem ratiocinio ipſe, & BERNOULLIUS, conficere poſſunt, quòd Methodus Fluxionum omninò abeſt ab Introductione ad meum Libellum *de Quadraturis.*

Aſſerit quoque ſe non videre, ubi explicuerim Methodum, quam mihi tribuo, ſumendi ſcilicet Series Arbitrarias; ſed, ſi perſpicere dignatur Commercii Epiſtolici paginas 56, & ſequentes uſque ad 86, videbit me compotem fuiſſe hujus Methodi Anno 1676. ſive potius quinque Annis antè. Vidiſſe etiam poteſt in ſecundo volumine Operum WALLISII *paginâ* 393, lineâ 32. quòd hæc Methodus non eget explicatione ampliori, quàm illâ, quæ à me data, & ibi relata eſt. Fieri quidem poteſt, (non inficior,) ut LEIBNITIUS hanc Methodum proprio ingenio detexerit; ſed certè poſtquam ego inveneram, & omnes norunt ſecundis Inventoribus nullum in inventa jus eſſe.

Contendit, quòd in meo *Principiorum* Libro, *paginis* 253. *&* 254. conceſſi eum habuiſſe Calculum Differentialem ſine me, & ait, quòd mihi nunc tribuens ejus inventionem, revoco, quæ conceſſeram; ſed in Articulo, quem citat, nec verbum quidem invenio, quod pro eo faciat. Quinimo ibi ſignifico, me de meâ Methodo monuiſſe LEIBNITIUM antèquàm ipſe me de ſuâ monuiſſet; & ei neceſſitatem impono probandi ſe hanc Methodum inveniſſe ante diem, ad quem data fuerat mea Epiſtola, id eſt, octo menſes ſaltem ante diem, ad quem ipſe ſuam dederat. Inſuper, cùm ibi rejiciam ad Epiſtolas, quæ inter me, & LEIBNITIUM interceſſerant decem annis antè, Lectoribus relinquo curam conſulendarum harum Epiſtolarum, quæ explicare poſſunt Articulum, de quo diſputatur. Ex his

his enim Epiſtolis videre poterant, me quinque annis antequàm ſcriberentur, (id eſt, anno 1671,) compoſuiſſe librum de hac, & Serierum Methodis ſimul junctis. Itaque Articulus ille, quem affert, ſatìs indicat, quid de hac re ſentiendum ſit; ſed paucis verbis, quia libri illius ſcopus non erat hujus negotii diſcuſſio.

Ait, quòd, cùm primò eſſet Londini menſibus Januario, & Februario Anni 1673, prorſus ignorabat Series infinitas, & Geometriam ſublimem, neque COLLINSIUM noverat, ut *malignè fingitur*. Sed qui finxit, aut quæ fingendi neceſſitas? Prorſùs neſcio. Tunc temporis jam PELLIUS ei locutus fuerat de Serie, quam MERCATOR invenerat pro quadrandâ *Hyperbolâ*; ſecum *Lutetiam Pariſiorum* attulit MERCATORIS Librum, quamquam Geometriam ſublimiorem adhuc ignorabat, & ii, quibus COLLINSIUS communicaverat meas, & *Gregorianas* Series, poterant aliquid de illis ei dixiſſe, licèt COLLINSIUM ipſum non noſceret.

Dicit, quòd, poſtquam è *Londino Lutetiam* ſe contuliſſet, priùs ſcripſit Epiſtolas de rebus à Geometriâ alienis, donec hanc eum HUGENIUS docuiſſet; quòd invenit Circuli *Quadraturam Arithmeticam* ſub finem Anni 1673; quòd de illâ ſcribere cœpit ad OLDEMBURGIUM Anno ſequenti; quòd pauló poſt invenit Methodum generalem Seriei ad libitum aſſumptæ, & *Calculum Differerentialem* Anno 1676, quem deduxerat è Seriebus numeralibus, ubi Differentiæ conſiderantur; & quod verba *Certâ Analyſi*, quæ ſunt in Litteris ab eo datis A. D. viceſimum tertium Auguſti Ann. 1676, intelligenda ſunt de Analyſi differentiali. Sed nonne, & ego æquè benè mihi teſtis eſſe poſſum, & affirmare, quòd inveneram Methodum Serierum & Fluxionum Anno 1665; quòd eam protuli Anno 1666; quòd etiam nunc apud me ſunt plura ſcripta mathematica, Annorum 1664, 1665, & 1666; quorum nonnullis dies adſcriptus eſt, & inter quæ unum, datum A. D. decimum tertium Novembris 1665, continet Methodum directam Fluxionum his verbis.

PRO-

PROBLEMA.

Datâ Æquatione exprimente Relationem duarum, aut plurium, linearum x; y; *&* z &c. *ſimul deſcriptarum à duobus, aut pluribus Mobilibus* A; B; C; &c. *invenire Relationem celeritatum* p; q; r; *earumdem.*

SOLUTIO.

Pone omnes Æquationis Terminos ad unam eandémque partem, ita ut ſint æquales nihilo; multiplica quemque Terminum per toties $\frac{p}{x}$, quot Dimenſiones habet x in illo Termino; Deinde, multiplica quemque Terminum per toties $\frac{q}{y}$, quot Dimenſiones habet y in illo Termino; Tertiò multiplica quemque Terminum per toties $\frac{r}{z}$, quot Dimenſiones habet z in illo Termino &c. & Summa horum Productorum erit æqualis nihilo; quæ Æquatio dat Relationem ipſarum p; q; r; &c.

Addere poſſum, quòd hæc Solutio ibi illuſtratur pluribus Exemplis; demonſtratur; applicatur ad Problemata, quæ pertinent ad Tangentes, & Curvaturas Curvarum; quod aliud ſcriptum, datum A. D. decimum ſextum Maii Ann. 1666, continet generalem Methodum reſolvendi Problemata ad Motum ſpectantia explicitam ſeptem Propoſitionibus, quarum ultima eſt ipſum Problema, de quo ſupra, ſcriptum A. D. decimum tertium Novembris An. 1665; quòd in Libello, ſcripto menſe Novembri 1666, eædem ſeptem Propoſitiones repetuntur, ſed ſeptima ita extenditur, ut eam non morentur neque Fractiones, neque Quantitates ſurdæ, neque demum eæ, quæ nunc dicuntur Tranſcendentes; quòd hic Libellus inſuper continet octavam Propoſitionem, quæ complectitur inverſam Fluxionum Methodum, qualem tunc temporis habebam; id eſt, quatenus pendet à Figurarum curvilinearum Quadraturis, à tribus Regulis, quibus innititur mea Analyſis *per Æquationes numero Terminorum infinitas*, & à ferè omnibus aliis Theorematibus, quæ ſunt in *Scholio* decimæ Propoſitionis mei Libri *de Qua-*

draturis; quòd in eo Libello Area proveniens ab aliquo ex Ordinatæ Terminis, quoties exprimi nequit Analyſi vulgari, exponitur ſymbolo $\boxed{}$ ante hunc Terminum ſcripto; Exempli gratiâ, ſi Abſciſſa eſt x, & Ordinata $ax - b + \frac{bb}{a+x}$, Area totalis eſt $\frac{1}{2} \times 4xx - bx + \boxed{}\, \frac{bb}{a+x}$; quòd ibi aliquando uſurpavi litteras unico Puncto notatas pro Quantitatibus Fluxiones primas involventibus, aliquando eaſdem litteras, ſed duobus Punctis auctas pro Quantitatibus Fluxiones ſecundas involventibus; quòd huic Libello innitebatur majus quoddam opus, quod ſcripſeram Anno 1671 & de quo memineram in Epiſtolâ datâ A. D. viceſimum quartum Octobris An. 1676, & quod initium ducebat à Reductione Quantitatum finitarum in Series convergentes, & à Solutione horum duorum Problematum.

I.

Relatione Quantitatum Fluentium inter ſe datâ, Fluxionum Relationem determinare.

II.

Expoſitâ Æquatione Fluxiones Quantitatum involvente, invenire Relationem Quantitatum inter ſe; & quòd hunc Librum ſcribens adeò generalem, Methodis Serierum, & Fluxionum ſimul junctis, Analyſim meam effeceram, ut ferè ad omnigena Problemata ſe extenderet; quod innueram in Litteris datis A. D. decimum tertium Junii An. 1676; & quòd hæc eſt Methodus, quam deſcripſeram in Epiſtolâ à me datâ A. D. decimum Decembris An. 1672.

Anno 1684. Leibnitius vulgavit tantùm Elementa Calculi Differentialis, quem applicavit ad aliquas Quæſtiones de Tangentibus, & ad quaſdam alias, quæ pertinent ad Methodum de *Maximis, & Minimis*, quod Fermatius, & Gregorius fecerant ante eum; & oſtendit quomodo in his Quæſtionum generibus procedi poſſit non ſublatis Quantitatibus irrationalibus; ſed Problemata ſublimioris Geometriæ non attigit. Liber de *Principiis Mathematicis* continet prima ſpecimina, (quæ quidem edita ſint,) hujus

hujus Calculi applicati ad profundiora Problemata; & ſic acceperam, quæ LEIBNITIUS dixerat in *Actis Lipſienſibus* Menſis Maii An. 1700 *paginâ* 206. Sed LEIBNITIUS animadvertit, quòd ea, quæ tunc dixerat, intelligenda ſunt de peculiari quâdam Arte circa *Maxima*, *&* *Minima*, quam mihi patuiſſe fatetur, cùm indicarem in meis *Principiis* Figuram Navis, aut Solidi minimè omnium reſiſtentis. Sed, cùm hæc Ars Methodum Differentialem cognitam ſupponat, quinimò cùm ultra ejus fines progrediatur; cùm alioquin huic Arti LEIBNITIUS, ejúſque Diſcipuli debeant Solutionem Problematum, quæ pluris ille facit, cùm denique LEIBNITIUS appellet hanc Artem Methodum maximi momenti, & vaſtiſſimæ extenſionis, mihi ſatìs eſt eum faſſum eſſe, quòd ego primus opere vulgato oſtendi me hanc Artem noviſſe.

Anno 1689. LEIBNITIUS pro ſuis edidit præcipuas Propoſitiones libri *de Principiis*, idque tribus ſcriptis, quorum tituli *Epiſtola de Lineis Opticis*: *Schediaſma de Reſiſtentiâ medii, & motu Projectilium gravium in medio reſiſtente*; & *Tentamen de Motuum Cæleſtium Cauſis*: has Propoſitiones à ſe inventas contendens ante editionem Libri de Principiis; &, ut meliùs ſibi vindicaret præcipuam ex his Propoſitionibus, cenſuit addendam Demonſtrationem, quam ipſe extruxerat; quæ cùm erronea eſſet, ipſe ſuam cauſam prodidit, & oſtendit ſe non intellexiſſe rationem procedendi ad ſecundas Differentias. Hoc fuit ſecundum ſpecimen palàm editum hujus Methodi applicatæ ad ſublimiorem Geometriam. Hactenus parum cognita fuerat, ſed uno, aut altero Anno præ omnium manibus eſſe cœpit.

Vulgaverat BAROVIUS Anno 1670. differentialem ſuam Methodum pro Tangentibus; GREGORIUS hanc Methodum ſuæ conferens ſibi comparavit Methodum generalem, quæ Calculo non indigebat, de quâ COLLINSIUM certiorem fecit Epiſtolâ datâ A. D. quintum Septembris An. 1670. SLUSIUS menſe Novembri An. 1672. cum OLDEMBURGIO communicavit Methodum ſimilem. Ego verò ad COLLINSIUM miſi Methodum iis proximam Litteris datis A. D. decimum Decembris 1672, & addidi me de eâ locutum fuiſſe BAROVIO dum *Lectiones* ſuas *Geometricas* ex

 cudenda-

Digitized by Google

cudendas curabat, & intellexiſſe Methodos Gregorii & Sluſii cum meâ convenire; hanc autem nihil eſſe niſi Ramum, aut Corollarium cujuſdam Methodi generalioris, quæ ſine moleſto computo complectebatur non ſolùm Tangentes, ſed alia Problemata abſtruſiora, ut ſunt, quæ ſpectant ad Curvarum Curvaturas, Areas, Longitudines, Centra Gravitatis &c.; & id quidem non remotis ab Æquatione Quantitatibus irrationalibus. Addidi etiam me hanc Methodum conjunxiſſe cum Methodo Serierum infinitarum, in Libello ſcilicet, quem ſcripſeram An. 1671. Oldemburgius, menſe Junio 1676. ad Leibnitium miſit Exempla harum duarum Epiſtolarum cum Excerptis ex Gregorii Litteris; pro quibus nihil non jam factum aut hiſce ipſis Litteris renuntiatum rependit Leibnitius Litteris datis A. D. viceſimum primum Junii 1677; cùm Methodus differentialis pro Tangentibus, quam tunc miſit eſſet ipſiſſima *Baroviana*, quam celaverat novâ notatione, & extenderat ad Methodos *Gregorianam* & *Sluſianam* pro Tangentibus, ad Æquationes Quantitatibus irrationalibus implicatas, & ad ſimpliciorem caſum mearum Quadraturarum. Mihi verò idem objici nequit; nam, Barovius viderat libellum meum de Analyſi Anno 1669, & ſibi placuiſſe teſtatus fuerat; & è meâ Methodo generali deduxeram Methodos Gregorii, & Sluſii pro Tangentibus, antequam *Lectiones Geometricæ* ederentur. Tunc Leibnitius ignorabat non ſolùm Geometriam ſublimiorem, ſed etiam Algebram vulgarem.

Ejus Epiſtola data A. D. viceſimum ſeptimum Auguſti 1676. continet hæc verba; *Quod dicere videmini pleraſque difficultates (exceptis Problematibus* Diophanteis) *ad Series infinitas reduci, id mihi non videtur. Sunt enim multa uſque adeò mira, & implexa, ut neque ab Æquationibus pendeant, neque ex Quadraturis. Qualia ſunt, ex multis aliis, Problemata Methodi Tangentium inverſæ.* Cùm autem reſpondiſſem hæc Problemata eſſe in meâ poteſtate, repoſuit Epiſtolâ datâ A. D. viceſimum primum Junii 1677. quòd ego fortè intelligebam per Series infinitas, ſed quòd ipſe locutus erat de Æquationibus vulgaribus; quod autem reſponſum fuerit videri poteſt in *Commercio Epiſtolico paginâ* 92.

Dicit:

Dicit intelligi poſſe, quòd, cùm ſcriberet Epiſtolam A. D. viceſimum ſeptimum Auguſti 1676, aliquatenus progreſſus erat in Calculo Differentiali, quia in hac Epiſtolâ ipſe indicat ſe ſolviſſe Problema *Beaunianum certâ Analyſi.* Sed quid? ſi oſtendero hoc Problema ſolvi poſſe *certâ Analyſi* non adhibitâ Methodo Differentiali. Ad hoc enim nulla alia requiritur Analyſis, quàm hæc; quòd ſcilicet oportet, ut Ordinata ad Curvam petitam creſcat, aut deſcreſcat in continuâ geometricâ Proportione, dum Abſciſſa creſcit in continuâ Proportione arithmeticâ; & idcirco ut Abſciſſa, & Ordinata eandem inter ſe Relationem habeant, ac Logarihmus, & Numerus ei reſpondens. Sed hinc inferre, quòd Methodus Differentialis penitus LEIBNITIUM non latebat, idem planè eſſet ac aſſerere eam ARCHIMEDI notam fuiſſe, quia ſcivit Tangentes ducere ad Spiralem, quadrare Parabolam, & invenit Rationem Sphæræ àd Cylindrum; ſive eam non fugiſſe CAVALLERIUM, FERMATIUM, & WALLISIUM, quia confecerunt plura ejuſdem generis.

APPENDIX.

Cùm Conſeſſus à *Regiâ Societate* convocatus edidit *Commercium Epiſtolicum*, non viderat Epiſtolas, & alia ſcripta, quæ apud me erant. Habebam autem duas Epiſtolas, alteram à LEIBNITIO datam A. D. $\frac{7}{17}$ Martii 1693, alteram verò à WALLISIO datam A. D. 10. Aprilis 1695, quæ, re poſtulante, jam duo ſunt Anni, productæ fuerunt, perpenſæ, & repoſitæ in Scriniis *Regiæ Societatis.* Prima palàm facit, quæ LEIBNITIUS de hac re ſentiebat, cùm mea ſymbola ignorabat; de Methodo Fluxionum nihil ſciebat, niſi quæ didicerat ex meis litteris, aliiſque ſcriptis Anno 1676, aut antea, compoſitis, aut ex meis *Principiis* Mathematicis, id eſt, cùm nondum in mentem mihi veniſſe poterat voluntas eum decipiendi. Ex eâ apertè patet, quòd tunc me ſibi anteferebat. Secunda verò, ſi conferatur cum præfatione Operum Mathematicorum WALLISII, oſtendet, quid cenſerent Mathematici tum *Angli*, tum exteri, cùm audierunt hanc Methodum differentialem percrebreſcere in Hollandiâ, & ejus inventionem tribui LEIBNITIO; Hìc addidimus primam Epiſtolam totam, & alterius partem.

EPISTOLA

LEIBNITII

AD

NEWTONUM

ILLUSTRI VIRO

ISAACO NEWTONO

GODEFRIDUS GUILLELMUS LEIBNITIUS S.P.D.

Hannoveræ $\frac{7}{17}$ Martii 1693.

QUantùm tibi Scientiam rerum Mathematicarum, totiúſque Naturæ debere arbitrer occaſione datâ, etiam publicè ſum profeſſus. Mirificè ampliaveras Geometriam tuis Seriebus; ſed, edito Principiorum Opere, oſtendiſti patere Tibi etiam quæ Analyſi receptæ non ſubſunt. Conatus ſum ego quoque, Notis commodis adhibitis, quæ Differentias & Summas exhibent, Geometriam illam, quam Tranſcendentem appello, Analyſi quodammodo ſubjicere; nec res malè proceſſit. Sed à te adhuc magni aliquod expecto ad ſummam manum imponendam; tum ut Problemata, quæ ex datâ Tangentium proprietate quærunt Lineas, reducantur optimè ad Quadraturas; tum ut Quadraturæ ipſæ, (quod valdè vellem,) reducantur ad Curvarum Rectificationes; ubique Superficierum, aut Corporum dimenſionibus ſimpliciores.

Sed ſuper omnia optem, ut, Geometricis abſolutis, Naturam, ut cœpiſti, mathematicè tractare pergas; in quo genere certè tu unus cum pauciſſimis ingens operæ pretium feciſti. Mirificum eſt, quòd inveniſti Ellipſes *Keplerianas* prodire, ſi tantummodo Attrac-

Digitized by Google

tio, ſive Gravitatio & Trajectio in Planetâ concipiantur. Tametſi enim eo inclinem, ut credam hæc omnia Fluidi ambientis motu ſive effici, ſive regi; analogia Gravitatis, & Magnetiſmi apud nos, nihil tamen ea res dignitati & veritati inventi tui detraxerit.

Quæ ſummus & ipſe Mathematicus *Chriſtianus* HUGENIUS in ſuâ notavit Appendice Libelli de cauſâ Luminis & Gravitatis, expenſa tibi non dubito; & ſententiam tuam viciſſim velim. Veſtrâ enim amicâ collatione potiſſimùm, qui in hoc genere eminetis, erui Veritas poteſt.

Cùm verò maximum tu quoque lumen ipſi Dioptricæ intuleris, explicatis Colorum Phænomenis inexpectatis, velim quid ſentias de *Hugenianâ* explicatione Radiationis, utique ingenioſiſſimâ, cùm feliciter adeò prodeat Lex Sinuum. Significavit mihi HUGENIUS, neſcio quæ nova Phænomena Colorum ſibi à Te communicata. Ego valde optem, ut ratio Colorum, quos fixos vocant, ex apparentibus deduci poſſit; ſeu, ut oſtendatur ratio efficiendi per Refractiones, ut tota aliqua Superficies certum Colorem oſtendat.

In Librorum apud Anglos editorum indicibus, occurrêre mihi aliquoties Libri mathematici Auctore NEWTONO, ſed dubitavi an à Te eſſent, quod vellem, an ab alio homonymo.

HEINSIUS noſter redux teſtis fuit benevolentiæ erga me tuæ. De cultu verò meo erga Te, non ille tantùm teſtari poteſt; ſed & STEPNEIUS, tecum ejuſdem olim Collegii habitator, nunc Magnæ Britanniæ Regis negotia apud Cæſarem, nuper apud Sereniſſimum Electorem Brandeburgicum, curans.

Hæc ſcribo magis, ut ſtudia erga Te mea intelligas, quæ nihil tot annorum ſilentio amiſêre, quàm ut Tua ego ſtudia, quibus auges humani Generis opes, interrumpere velim vacuis Litteris & ſupervacuis, vale.

EXCERP-

Digitized by Google

EXCERPTUM EPISTOLÆ *A* WALLISIO *AD* NEWTONUM

Datæ Oxoniæ A. D. 10. Aprilis An. 1695.

UTinam typis ederes prolixas illas duas Epiſtolas Junii & Auguſti (Octobrem *dicere debuit*) 1676. Ex Hollandiâ certior factus ſum amicos ibi tuos hoc poſtulare; quia notiones tuæ (de Fluxionibus) LEIBNITIO ibi aſcribuntur, ſub nomine *Calculi Differentialis.* Hoc ex *Hollandiâ* accepi cùm totus hic Tomus, præter partem Præfationis, jam prælo ſubjectus eſſet, ita ut nihil aliud inſerere hìc potuerim, dum ceſſarent operæ, præter brevem illam, quam ibi reperies, narrationem. Non tam æquus es vel tuo vel Gentis tuæ honori, quàm oportebat; cùm res quantivis pretii tamdiu in Scriniis celas, donec alii honorem tibi debitum præripiant. Conatus ſum *in eo negotio debitum tibi reddere.*

En Præfationis *Walliſianæ*, editæ menſe Aprili An. 1695, locum de quo ſupra mentio facta eſt.

Quæ in ſecundo Volumine habentur, in Præfatione eidem præfixâ dicitur. Ubi (inter alia) habetur NEWTONI Methodus de *Fluxionibus*, (ut ille loquitur,) conſimilis naturæ cum LEIBNITII, (ut hic loquitur,) *Calculo Differentiali*, (quod qui utramque Methodum contulerit, ſatis animadvertat, utut ſub loquendi formulis diverſis,) quam ego deſcripſi (*Algebræ Cap.* 91. &c. præſertim *Cap.* 95.) ex binis NEWTONI Litteris, (aut earum alteris,) *Junii* 13. & *Octob.* 24. 1676. ad OLDEMBURGIUM datis, cum LEIBNITIO tum communicandis, (iiſdem ferè verbis, ſaltem leviter mutatis, quæ in illis Litteris habentur;) ubi Methodum hanc LEIBNITIO exponit, tum ante decem annos, nedum plures, ab ipſo excogitatam. Quod moneo ne quis cauſetur de hoc *Calculo Differentiali* nihil à nobis dictum eſſe.

FRAGMEN-

FRAGMENTUM BREVIARII OPERUM WALLISIANORUM

DATI IN

ACTIS ERUDITORUM

Menſ. Jun. An. 1696. Pag. 257; 258.

CEterùm ipſe NEWTONUS, non minùs candore quàm præclaris in rem mathematicam meritis inſignis, publicè & privatim agnovit LEIBNITIUM tum, cùm (interveniente celeberrimo Viro *Henrico* OLDEMBURGIO *Bremenſi* Societatis Regiæ *Anglicanæ* tunc Secretario) inter ipſos, (ejuſdem jamtum Societatis ſocios,) Commercium intercederet, id eſt, jam ferè annos viginti, & ampliùs, Calculum ſuum differentialem, Seriéſque infinitas, & pro iis quoque Methodos generales habuiſſe; quod WALLISIUS in Præfatione Operum factæ inter eos communicationis mentionem faciens, præteriit; quoniam de eo fortaſſe non ſatìs ipſi conſtabat.

Ceterùm Differentiarum conſideratio *Leibnitiana*, cujus mentionem facit WALLISIUS, (ne quis ſcilicet, ut ipſe ait, cauſaretur de Calculo Differentiali nihil ab ipſo dictum fuiſſe,) meditationes aperuit, quæ aliunde non æquè naſcebantur. Eſt enim Differentia Analyticum quiddam, & Calculi capax, &, quod rei caput eſt, Summæ reciprocum.

ANIMADVERSIONES NEWTONI

In ſuperius Actorum Lipſienſium Fragmentum.

Aſſerueram quidem in Epiſtolis à me datis A. D. decimum tertium Junii, & viceſimum quartum Octobris An. 1676. me adeptum fuiſſe Methodum Fluxionum aliquot Annos antè; ſed nunquam faſſus

ſum LEIBNITIUM habuiſſe Methodum differentialem ante Annum 1677. Neſciebam, quid ſibi tunc tribueret, cùm patefacere animum ſuum cœpiſſet ſolummodo Epiſtolâ datâ A. D. viceſimum primum Junii eodem Anno. Nunquam conceſſi ſuam Tranſmutationum Methodum generalem eſſe pro Seriebus, neque tunc ſciebam eum recepiſſe Anno ſuperiore ab OLDEMBURGIO Seriem à LEIBNITIO mihi miſſam, nec illam inventam fuiſſe à GREGORIO Anno 1611. Methodus Tranſmutationum non eſt Methodus obtinendi Series, ſed Theorema peculiare, quo una Figura in aliam tranſmutatur. Talia ſunt Theoremata GREGORII, & BAROVII. Scholium adnexum ſecundo Lemmati ſecundi libri meorum *Principiorum Mathematicorum*, quod toties malè allatum eſt contra me, ſcriptum non fuit, ut hujus Lemmatis gloria LEIBNITIO tribueretur, ſed ut mihi aſſereretur. Utrùm LEIBNITIUS illud poſt me invenerit, aut ex me mutuatus fuerit, quæſtio eſt nullius momenti, nam ſecundis Inventoribus nullum jus in Inventa eſt.

WALLISIUS Litteris datis Kalendis Decembribus An. 1696, & editis in tertio ſuorum Operum Tomo LEIBNITIUM monuit de verbis, quæ inſeruerat Præfationi primi voluminis, & de quibus ſupra meminimus; neque tunc LEIBNITIUS inficiatus eſt, quæ WALLISIUS dixerat, nempè à me illi explicatam fuiſſe Anno 1676. Methodum Fluxionum, quam inveneram decem, aut pluribus Annis antè; neque de WALLISIO queſtus eſt. Ait in Epiſtolâ datâ A. D. undetriceſimum Martii 1697. *De te autem queri nunquam mihi in mentem venit, quem facilè apparet noſtra in Actis Lipſienſibus prodita non ſatis vidiſſe.* Fatebatur has Methodos eſſe ſimiles †, ut *Wallisius* affirmaverat; quamobrem in Epiſtolâ datâ A. D. duodetriceſimum Maii 1697. ait ſe *itaque communi nomine deſignare ſolere Analyſeos Infiniteſimalis.* Deinde addit, *quemadmodum, &* Vietæa, & Carteſiana *Methodus* Analyſeos Specioſæ *nomine venit; diſcrimina tamen nonnulla ſuperſunt: ita fortaſſe &* Newto-

† En ejus verba *Methodum* Fluxionum *profundiſſimi* NEWTONI *cognatam eſſe Methodo mea* Differentiali *non tantùm animadverti, poſtquam opus ejus, & ſuum prodiit, ſed etiam profeſſus ſum in* Actis Eruditorum, *& alias quoque monui.* Epiſt. ad Wall. 28. Maii 1697. Vide Comm. Epiſt. N°. LXXVI. pag. 216. Edit. ſecundæ.

Newtoniana, *&* mea *differunt in nonnullis.* Sic innuens ea differre Additionibus, quibus hæc cumulaverat. Quapropter excuſat WALLISIUM, qui de his Additionibus non meminerit, quia ea *in Actis Lipſienſibus prodita non ſatis* viderat, & teſtatur ſibi de WALLISIO *queri nunquam in mentem veniſſe* quâcumque aliâ de cauſâ.

Sed, ſi CARTESIUS nunquam ſe aſſeruit Auctorem *Analyſeos ſpecioſæ Vietææ*, aliter ſe geſſit LEIBNITIUS circa Methodum Infiniteſimalem, quam ſemper appellavit ſuam Methodum; unde FATIUS impulſus eſt ad ſequentia ſcribenda.

EXCERPTUM

E Libro Nicolai FATII DUILLERII *inſcripto*

Inveſtigatio Geometrica Solidi rotundi, in quod minima fiat reſiſtentia.

Et edito An. 1699.

QUæret forſan Cl. LEIBNITIUS, unde mihi cognitus ſit iſte Calculus, quo utor. Ejus equidem fundamenta, ac pleraſque Regulas proprio Marte anno 1687., circa Menſem Aprilem, & ſequentes, aliiſque deinceps annis, inveni; quo tempore neminem eo Calculi genere, præter me ipſum, uti putabam. Nec mihi minùs cognitus foret, ſi nondum natus eſſet LEIBNITIUS. Aliis igitur glorietur Diſcipulis, me certè non poteſt. Quod ſatis patebit, ſi olim Litteræ, quæ inter Clariſſimum HUGENIUM méque interceſſerunt, publici juris fiant. NEWTONUM tamen primum ac pluribus annis vetuſtiſſimum hujus Calculi Inventorem, ipsâ rerum evidentiâ coactus agnoſco; à quo utrùm quicquam mutuatus ſit LEIBNITIUS, ſecundus ejus Inventor, malo eorum, quàm meum ſit Judicium, quibus viſæ fuerint NEWTONI Litteræ, aliíque ejuſdem Manuſcripti Codices. Neque modeſtioris NEWTONI ſilentium, aut prona LEIBNITII ſedulitas, inventionem hujus Calculi ſibi paſſim tribuentis, ullis imponet, qui ea pertractârint, quæ ipſe evolvi, Inſtrumenta.

Digitized by Google

ANIMADVERSIONES

NEWTONI

In ſuperiora FATII *verba.*

HIc teſtis eſt FATIUS & narrat quæ viderat, ac eò magis fidem facit, quòd magis contra ſe ipſum loquitur, & quò minus, cùm Anglus non ſit, credi poteſt mihi favere. Noverat Methodos noſtras, & fretus iis, quæ viderat, & perſpexerat, rectè judicare poterat.

FINIS TOMI PRIMI.

Digitized by Google

00565 2 382
Digitized by Google

Digitized by Google